

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

\mathbb{K} je \mathbb{R} nebo \mathbb{C}

Definice 1. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkci $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X , pokud

- (i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Tvrzení 2. Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} .

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je *translačně invariantní metrika* na X .

(b) Norma je *1-lipschitzovská* (a tedy *spojitá*) funkce na X .

(c) Zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ jsou *spojitá*.

Důkaz. Důkaz části (c) byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá *jednotková koule* v X .
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá *otevřená jednotková koule* v X .
- Množina $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ se nazývá *jednotková sféra*.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je *úplný* v metrice dané normou.

Tvrzení 4. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho *podprostor*.

(a) Je-li Y *Banachův*, pak Y je *uzavřený* v X .

(b) Je-li X *Banachův*, pak Y je *Banachův*, právě když Y je *uzavřený* v X .

Příklad 5. Příklady Banachových prostorů ($p \in [1, \infty)$):

$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p)$; $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$; ℓ_p ; $C(K)$; c_0 ; c_{00} (je normovaný lineární, není Banachův).

Definice 6 (ekvivalentní normy). Necht' X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Tvrzení 7. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou *ekvivalentní*:

- (i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*.
- (ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.
- (iii) Zobrazení $\text{Id}: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je *homeomorfismus*.
- (iv) *Otevřené množiny* v $(X, \|\cdot\|_1)$ *splývají* s *otevřenými množinami* v $(X, \|\cdot\|_2)$.
- (v) $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a bude zkoušen. □

Konec 1. přednášky

Definice 8. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Necht' $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů x_1, \dots, x_n s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 9. Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.

Definice 10. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 11. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. \square

Definice 12. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Definice 13. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme uzavřený lineární obal M jako $\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M; Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a uzavřený konvexní obal M jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 14. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak \overline{Y} je podprostor X a \overline{C} je konvexní množina.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. \square

Tvrzení 15. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span}} \overline{M}$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv}} \overline{M}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. \square

Věta 16. Necht' X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. \square

Důsledek 17. Necht' X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. \square

2. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \rightarrow Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad \mathbb{K} se nazývá lineární, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 18. Necht' X, Y jsou vektorové prostory, $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\text{conv } M) = \text{conv } T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. \square

Tvrzení 19. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) T je spojitý.
- (ii) T je spojitý v 0.
- (iii) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (iv) $T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.
- (v) $T(B_X)$ je omezená.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. \square

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 20. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

- (a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.
- (b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|.$

(c) $\|T\| = \inf \{C \geq 0; \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 21. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \rightarrow T(x)$ v prostoru Y .*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 22. *Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 2. přednášky

Věta 23. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 24. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X .*

Věta 25. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 26. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je*

- *izomorfismus X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;*
- *izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$;*
- *izometrie X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;*
- *izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.*

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfnní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y ;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y .

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfnně vnořen do Y* , pokud existuje lineární izomorfismus X do Y ;
- *izometricky vnořen do Y* , pokud existuje lineární izometrie X do Y .

Poznámka 27. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T: X \rightarrow Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 28. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.*

(b) *Je-li X izomorfnní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.*

(c) *Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\text{Rng } T$ je uzavřený v Y .*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Fakt 29. *Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.*

(a) *Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.*

(b) *Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Věta 30. *Necht' X, \hat{X} a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v \hat{X} a Y je úplný. Necht' dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, Y)$ rozšiřující T , tj. $\hat{T}|_X = T$. Navíc platí $\|\hat{T}\| = \|T\|$.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

3. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 31. Necht' $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 32. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X . Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 33 (Test úplnosti). Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

4. Konečněrozměrné prostory

Konec 3. přednášky

Lemma 34 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). Necht' X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X , pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 35. Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\dim X < \infty$.
- (ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
- (iii) B_X je kompaktní.
- (iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojitě.
- (v) Každá lineární forma na X je spojitá.
- (vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

Důkaz. Důkaz ekvivalence prvních tří podmínek byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad \mathbb{K} a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 36. Necht' $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence \sim na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme \hat{x} jako třídu ekvivalence obsahující x , tedy

$$\hat{x} = \{y \in X; y \sim x\} = \{y \in X; y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\hat{x}; x \in X\}$$

definujeme operace $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha \hat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\hat{x}, \hat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 37. Necht' X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y . Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q: X \rightarrow X/Y$ předpisem $q(x) = \hat{x}$.

Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y \in \hat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ &= \text{dist}(x + Y, 0) = \text{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 38. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q: X \rightarrow X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na A splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 39. Necht' X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 40. Necht' X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním* (též *algebraickým*) *součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \text{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X .

Definice 41. Necht' X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P: X \rightarrow X$ se nazývá (*lineární*) *projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Tvrzení 42. Necht' X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\text{Rng } P_A = A$, $\text{Ker } P_A = B$, $\text{Rng } P_B = B$ a $\text{Ker } P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X , pak $X = A \oplus B$, kde $A = \text{Rng } P$, $B = \text{Ker } P$ a $P = P_A$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 43. Necht' X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X .

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X , je A algebraicky izomorfní s X/Y ; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Definice 44. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\text{codim } Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplnku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Konec 4. přednášky

Definice 45. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B , pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$. Je-li A podprostor X , pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_t B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X . Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 46. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení $T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z$, $T(x) = (P_Y(x), P_Z(x))$ je izomorfismus.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 47. Necht' X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

6. Hilbertovy prostory

Definice 48. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad \mathbb{K} rozumíme funkci $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

- (i) funkce $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Tvrzení 49 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ pro každé $x, y \in X$.

(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X .

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Fakt 50. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Tvrzení 51 (rovnoběžníkové pravidlo). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Definice 52. Necht' X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A, y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A .

Fakt 53 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.). *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Tvrzení 54. *Necht' $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad \mathbb{K} . Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Lemma 55. *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Tvrzení 56. *Necht' X je prostor se skalárním součinem.*

- (i) Je-li Y podprostor X , pak $Y^\perp \cap Y = \{0\}$.
- (ii) $\{0\}^\perp = X$ a $X^\perp = \{0\}$.
- (iii) Pro $A \subset X$ je $A^\perp = (\overline{\operatorname{span} A})^\perp$.
- (iv) Pro $A \subset X$ je A^\perp uzavřený podprostor.
- (v) Je-li $X = Y + Z$ pro nějaké podprostory $Y, Z \subset X$ takové, že $Y \perp Z$, pak $Z = Y^\perp$, $Y = Z^\perp$ a $X = Y \oplus Z$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Tvrzení 57 (polarizační vzorec). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním případě.

Důkaz. Důkaz reálného případu byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 58. *Necht' X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T: X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Důkaz. Důkaz reálného případu byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 59. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Věta 60 (Frigeys Riesz, 1934). *Necht' C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Lemma 61 (F. Riesz, 1934). *Necht' X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 5. přednášky

Definice 62. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $P: X \rightarrow X$ je projekce. Pokud $x - Px \perp \text{Rng } P$ pro každé $x \in X$, pak P se nazývá ortogonální projekce.

Věta 63. *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $P: X \rightarrow X$ je lineární projekce. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (i) P je ortogonální projekce.
- (ii) $\text{Ker } P = (\text{Rng } P)^\perp$ a $\text{Rng } P = (\text{Ker } P)^\perp$.
- (iii) $\|x - Px\| = \text{dist}(x, \text{Rng } P)$ pro každé $x \in X$.
- (iv) P je spojitá a $\|P\| \leq 1$ (tj. $P = 0$, nebo $\|P\| = 1$).

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 64. *Necht' H je Hilbertův prostor a $Y \subset H$ uzavřený podprostor. Pak $H = Y \oplus_t Y^\perp$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 65. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortogonální*, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A, x \neq y$;
- *ortonormální*, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A ;
- *úplná ortonormální*, pokud A je ortonormální a $\overline{\text{span}} A = X$;
- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_i; i \in \mathbb{N}\}$ je ortonormální množina (kde $\mathbb{N} \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$) a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$ pro nějaké skaláry x_i (kde $\sum_{i=1}^N x_i e_i$ značí $\sum_{i=1}^\infty x_i e_i$).

Věta 66 (Besselova nerovnost). *Je-li $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ a $\{e_i\}_{i \in N}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 67. *Necht' H je Hilbertův prostor, $N \in \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$ a $\{e_i\}_{i=1}^N$ je ortonormální systém v H . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

- (i) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^N |\langle x, e_i \rangle|^2$ pro každé $x \in H$ (tzv. Parsevalova rovnost).

(ii) $x = \sum_{i=1}^N \langle x, e_i \rangle e_i$ pro každé $x \in H$.

(iii) $\{e_i\}$ je ortonormální báze.

(iv) $H = \overline{\text{span}}\{e_i; i \in \mathbb{N}\}$.

(v) $\{e_i\}$ je maximální ortonormální systém.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky.

Důsledek 68. Každý separabilní Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována.

Věta 69. Každý separabilní nekonečně-dimenzionální Hilbertův prostor je izometrický prostoru ℓ_2 .

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována.

Věta 70 (vyjádření ortogonální projekce). Necht' H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Necht' $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ a $(e_j)_{j \in N}$ je nějaká ortonormální báze prostoru Y . Pak projekci na Y podél Y^\perp (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem

$$Px = \sum_{j=1}^N \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky.

Konec 6. přednášky

Věta 71 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934)). Necht' H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcional definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I: H \rightarrow H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^* .

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována.

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Duální a adjungované operátory - základy

Definice 72. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ definovaný předpisem

$$T^*f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T . (Ve Větě 73 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**} .

Věta 73. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| \leq \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární zobrazení z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $\text{Id}_X^* = \text{Id}_{X^*}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky.

Věta 74. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^* = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j: H_j \rightarrow H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 71.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky.

Definice 75. Operátor T^* z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T .

Věta 76. Necht' H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{**} = (T^*)^* = T$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární bijekce $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $(\text{Id}_{H_1})^* = \text{Id}_{H_1}$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky.

2. Reprezentace duálů

Definice 77. Necht' $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sduženým exponentem k p*, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Konec 7. přednášky

Věta 78 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům). (a) Prostor c_0^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_1 pomocí zobrazení $I: \ell_1 \rightarrow c_0^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdužený exponent k p , pak prostor ℓ_p^* je lineárně izometrický s prostorem ℓ_q pomocí zobrazení $I: \ell_q \rightarrow \ell_p^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdužený exponent k p , pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f g \, d\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ -konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_{\infty}(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} f g \, d\mu.$$

Důkaz. Dokázané části na přednášce, které mohou být zkušeny: (a), (c) a (d) pro případ prostoru s konečnou mírou. \square

Věta 79 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$). Je-li K kompaktní metrický prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech borelovských \mathbb{K} -hodnotových měr na K pomocí zobrazení $I: M(K) \rightarrow C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_{\mu}$, kde

$$\varphi_{\mu}(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. \square

3. Hahnova-Banachova věta

Definice 80. Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} . Funkce $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p: X \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 81 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). Necht' X je vektorový prostor a Y je podprostor X .

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.

Důkaz. Důkaz části (a) byl vynechán, důkaz (b) byl na přednášce předveden a může být zkušén. \square

Konec 8. přednášky

Věta 82 (Hahnova-Banachova). Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 83. *Necht' X je netriviální normovaný lineární prostor. Pak pro každé $x \in X$ platí*

$$\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 84. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Pak zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 85. *Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Pak zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce vynechán, ale není složitý. Může být použit u zkoušky jako teoretický příklad. □

Věta 86 (Oddělování bodu a podprostoru). *Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \text{dist}(x, Y) > 0$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

III. Omezené operátory v Banachových prostorech

1. Kompaktní operátory

Definice 87. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y . Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.*

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\text{Rng } T$ má konečnou dimenzi. Množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y označíme jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 88. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T: X \rightarrow Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X , pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 89. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(c) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 90 (Arzela-Ascoli). *Necht' (K, d) je kompaktní metrický prostor a $F \subset C(K)$. Pak F je relativně kompaktní v $C(K)$, právě když je omezená a stejně stejnoměrně spojitá (tj. pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující, že kdykoliv $f \in F$ a $d(x, y) < \delta$ pak $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$).*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

2. Druhý duál a reflexivita

Definice 91. Necht' X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^* . Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 92. Necht' X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}* .

Tvrzení 93. Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**} .

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Konec 9. přednášky

Tvrzení 94 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X: X \rightarrow X^{**}$ a $\varepsilon_Y: Y \rightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 95 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 96. Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X , pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2 , která je na X identitou.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 97. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(b) T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.

Důkaz. Část (a) byla na přednášce dokázána a může být zkoušena. □

Definice 98. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 99. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Důkaz. Část (a) byla na přednášce dokázána a může být zkoušena. □

Příklady 100.

(a) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

(b) Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

(c) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(d) Prostory $c_0, \ell_1, \ell_\infty, L_1([0, 1]), L_\infty([0, 1])$ a $C([0, 1])$ nejsou reflexivní.

(e) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**} .

Věta 101 (James). Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

3. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 102 (Princip stejnoměrné omezenosti). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 103. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \in \mathbb{R}$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 104. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 105 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 106 (S. Banach, 1929). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T je prostý a na.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 107. *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak prostor Y je izomorfní s $X/\text{Ker } T$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 108. Je-li $f: X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do množiny Y , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f* . Říkáme, že zobrazení $f: X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má *uzavřený graf*, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 109 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojitě, právě když má uzavřený graf.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Konec 10. přednášky

4. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 110. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Tvrzení 111. *Necht' X je Banachův prostor.*

(a) *Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $\text{Id}_X - T$ je inveribilní a platí $(\text{Id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

(b) *Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$, pak S je invertovatelný. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Definice 112. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T , pokud $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X, x \neq 0$. Prostor $\text{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ . Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ . Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_p(T)$.*

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Věta 113. *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina \mathbb{K} splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Důkaz. Na přednášce bylo dokázáno, že $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina \mathbb{K} splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Tato část důkazu může být zkoušena. □

Věta 114. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 115. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(a) *Jestliže $\text{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \text{Rng}(T) < \infty$.*

(b) *Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.*

(c) *Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\text{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 116 (Fredholmova alternativa). *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Důsledek 117. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

Důkaz. Důkaz byl předveden na přednášce a může být vyžadován u zkoušky. □

Věta 118. *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Důsledek 119. *Necht' X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T , přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 120 (Druhá Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor nad \mathbb{K} , $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \text{Rng}(\lambda I_X - T) &= (\text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))_{\perp}, \\ \text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) &= (\text{Ker}(\lambda I_X - T))^{\perp}. \end{aligned}$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Věta 121 (Třetí Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \text{Ker}(\lambda I_X - T) = \text{codim Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \text{codim Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Důkaz. Důkaz byl vynechán a jeho znalost u zkoušky nebude nijak vyžadována. □

Konec 11. přednášky

IV. Lokálně konvexní prostory

Definice 122. *Necht' X je vektorový prostor nad \mathbb{K} a \mathcal{P} je systém pseudonorem na X oddělující body X (tj. pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ splňující $p(x) \neq 0$). Pak řekneme, že (X, \mathcal{P}) je lokálně konvexní prostor.*

Je-li $x \in X$ a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ posloupnost v X splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} p(x_n - x) = 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$, pak řekneme že x_n konverguje k x v (X, \mathcal{P}) a píšeme $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Příklad 123. (i) *Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor. Uvažujme $\mathcal{P} = \{\|\cdot\|\}$. Pak $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$, právě když $x_n \rightarrow x$ v prostoru $(X, \|\cdot\|)$.*

(ii) *Necht' X je Banachův prostor. Uvažujme pro každé $x^* \in X^*$ pseudonormu p_{x^*} definovanou předpisem $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$, $x \in X$. Symbolem w označujeme systém pseudonorem $\{p_{x^*}; x^* \in X^*\}$. Pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$ pro každé $x^* \in X^*$ a v takovém případě říkáme, že x_n slabě konverguje k x .*

- (iii) Necht' X je Banachův prostor. Uvažujme pro každé $x \in X$ pseudonormu p_x na X^* definovanou předpisem $p_x(x^*) = |x^*(x)|$, $x^* \in X^*$. Symbolem w^* označujeme systém pseudonorem $\{p_x; x \in X\}$. Pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$ pro každé $x \in X$ a v takovém případě říkáme, že x_n^* slabě s hvězdičkou konverguje k x^* .
- (iv) Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina, $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \mathbb{N}\}$ a $C^k(\Omega)$ vektorový prostor reálných funkcí které mají spojitě všechny parciální derivace až do řádu $\leq k$. Uvažujme na $C^k(\Omega)$ systém pseudonorem \mathcal{P} sestávající z pseudonorem

$$p_{m,K}(f) := \sup_{\beta \in \mathbb{N}_0^d, |\beta| \leq m} \sup_{x \in K} |(D^\beta f)(x)|, \quad m \in \mathbb{N}_0, m \leq k, K \subset \Omega \text{ kompaktní.}$$

Pak $(C^k(\Omega), \mathcal{P})$ je lokálně konvexní prostor a $f_n \xrightarrow{\mathcal{P}} f$ pokud $D^\beta f_n \rightarrow D^\beta f$ stejnoměrně na kompaktních množinách pro každé $\beta \in \mathbb{N}_0^d$ splňující $|\beta| \leq k$.

Lemma 124. Necht' (X, \mathcal{P}) je lokálně konvexní prostor a (x_n) posloupnost v X . Pak existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Lemma 125. Necht' X je Banachův prostor.

- (a) Pokud $x \in X$ a $x_n \rightarrow x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.
- (b) Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.
- (c) Pokud X je reflexivní, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$.

Věta 126. Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.

Tvrzení 127. Necht' X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^* , $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X$. Pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \rightarrow x^*(d)$ pro každé $d \in D$.

Tvrzení 128. Necht' X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X , $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X^*$. Pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \rightarrow d(x)$ pro každé $d \in D$.

Příklady 129. Pro následující Banachovy prostory X , posloupnost $\{x_n\}$ v X a $x \in X$ platí:

- (a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$ pro $p \in (1, \infty)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \rightarrow x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;
- (b) Pokud $X = \ell_p$ pro $p \in [1, \infty]$, pak $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \rightarrow x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;
- (c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \rightarrow x(k)$, $k \in K$;
- (d) Pokud $X = \ell_1$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$ (bez důkazu);

Definice 130. Necht' (I, \leq) je částečně uspořádaná množina taková, že pro každé $i, j \in I$ existuje $k \in I$ splňující $k \geq i$ a $k \geq j$. Pokud X je množina a $(x_i)_{i \in I} \in X^I$, pak řekneme, že $(x_i)_{i \in I}$ je net. Pokud je $(x_i)_{i \in I}$ net v metrickém prostoru (X, d) a $x \in X$, pak řekneme že net $(x_i)_{i \in I}$ konverguje k x , pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $i_0 \in I$ splňující že $d(x_i, x) < \varepsilon$ pro $i \geq i_0$.

Definice 131. Necht' (X, \mathcal{P}) je lokálně konvexní prostor. Je-li $x \in X$ a $(x_i)_{i \in I}$ net v X splňující $\lim_{i \in I} p(x_i - x) = 0$ pro každé $p \in \mathcal{P}$, pak řekneme že x_i konverguje k x v (X, \mathcal{P}) a píšeme $x_i \xrightarrow{\mathcal{P}} x$.

Symbolem $(X, \mathcal{P})^*$ označujeme spojitá lineární zobrazení $f : X \rightarrow \mathbb{K}$, tedy taková lineární zobrazení f , pro která platí, že kdykoliv net (x_i) konverguje k x v (X, \mathcal{P}) , pak $f(x_i) \rightarrow f(x)$.

Příklad 132. Necht' X je Banachův prostor. Pak platí

- (i) $(X, w)^* = X^*$.
- (ii) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

Věta 133 (Oddělování konvexních množin). Necht' (X, \mathcal{P}) je lokálně konvexní prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:

- (a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in (X, \mathcal{P})^*$ takový, že $\text{Re } f(x) < \inf_B \text{Re } f$ pro každé $x \in A$.
- (b) Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in (X, \mathcal{P})^*$ takový, že $\sup_A \text{Re } f < \inf_B \text{Re } f$.