

I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

$\mathbb{K}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice 1. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X , pokud

- (i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- (ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Definice 2. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Tvrzení 3 (norma a jednotková koule). Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $q: X \rightarrow [0, \infty)$ splňuje

- (i) $q(x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,
- (ii) $q(\alpha x) = |\alpha| q(x)$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Pak q je norma na X , právě když množina $B_q = \{x \in X; q(x) \leq 1\}$ je konvexní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Příklady normovaných lineárních prostorů. Necht' $1 \leq p \leq \infty$. Všechny následující prostory s uvedenými normami jsou normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$.

(1) Je-li $n \in \mathbb{N}$ a $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, klademe

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|, & p = \infty. \end{cases}$$

Tak dostáváme prostor $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$.

(2) Je-li I množina, pro $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ klademe

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i \in I} |x_i|^p \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \sup_{i \in I} |x_i|, & p = \infty, \end{cases}$$

$$\ell_p(I) = \{x \in \mathbb{K}^I; \|x\|_p < \infty\}.$$

Pro $p < \infty$ rozumíme součtem přes I supremum součtů přes konečné podmnožiny I . Pro $I = \mathbb{N}$ píšeme jen ℓ_p .

(3) Je-li $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou, ztotožňujeme $\mathcal{A}$ -měřitelné funkce $\Omega \rightarrow \mathbb{K}$ shodné μ -skoro všude a klademe $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K}) = \{f: \Omega \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ je } \mathcal{A}\text{-měřitelná a } \|f\|_p < \infty\}$, kde

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}, & p < \infty, \\ \text{ess sup}_{\Omega} |f|, & p = \infty. \end{cases}$$

(Výše definované prostory $\ell_p(I)$ jsou speciálním případem: na I vezmeme σ -algebru $\mathcal{P}(I)$ a počítací míru.)

(4) Je-li K neprázdný kompaktní Hausdorffův prostor, pak

$$C(K) = \{f: K \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ je spojitá}\}.$$

Normou na $C(K)$ je $\|f\|_{\infty} = \max_{t \in K} |f(t)|$.

(5) Prostory

$$c = \{x = (x_n) \in \ell_\infty; (x_n) \text{ konverguje v } \mathbb{K}\},$$
$$c_0 = \{x = (x_n) \in \ell_\infty; x_n \rightarrow 0\}$$

jsou podprostory ℓ_∞ ; oba uvažujeme s normou

$$\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Tvrzení 4. *Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) *Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X .*

(b) *Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X .*

(c) *Zobrazení $+: X \times X \rightarrow X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \rightarrow X$ jsou spojitá.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X; \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X .
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X .
- Množina $S_X = \{x \in X; \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 5. *Banachův prostor je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.*

Tvrzení 6. *Každý konečněrozměrný normovaný lineární prostor je Banachův.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. □

Definice 7. *Necht' $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je absolutně konvergentní, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.*

Věta 8 (Test úplnosti). *Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. □

Tvrzení 9. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) *Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X .*

(b) *Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X .*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Tvrzení 10 (O rozšířené normě). *Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor a $\varphi: X \rightarrow [0, +\infty]$ splňuje následující vlastnosti:*

(a) *φ splňuje axiomy normy, přičemž homogenitu požadujeme pouze pro $\lambda \neq 0$;*

(b) *$\varphi(x) \geq \|x\|$ pro každé $x \in X$;*

(c) *φ je zdola polospojité na X , tj. množina $\{x \in X; \varphi(x) \leq c\}$ je uzavřená v X pro každé $c \in \mathbb{R}$.*

Pak $Y = \{x \in X; \varphi(x) < +\infty\}$ je lineární podprostor X a (Y, φ) je Banachův prostor.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Příklad 11. Všechny výše zavedené normované lineární prostory $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_p)$, $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$, $\ell_p(I)$, $C(K)$, c a c_0 jsou Banachovy.

konec 1. přednášky (30. 9. 2026)

Další příklady Banachových prostorů.

(1) Je-li I množina, klademe

$$c_0(I) = \{x = (x_i)_{i \in I} \in \ell_\infty(I); \text{ pro každé } \varepsilon > 0 \text{ je množina } \{i \in I; |x_i| \geq \varepsilon\} \text{ konečná}\}.$$

Normou na $c_0(I)$ je $\|x\|_\infty = \sup_{i \in I} |x_i|$. Jedná se o Banachův prostor. Pro $I = \mathbb{N}$ dostáváme výše zavedený prostor c_0 .

(2) Prostor

$$C^1([0, 1]) = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ je spojitě diferencovatelná}\}$$

uvažujeme s normou

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| + \max_{t \in [0, 1]} |f'(t)|.$$

Jedná se o Banachův prostor.

(3) Je-li K neprázdný kompaktní Hausdorffův prostor, označíme $\mathcal{M}(K)$ prostor všech konečných regulárních borelovských $\mathbb{K}$ -hodnotových měr na K . Normou na $\mathcal{M}(K)$ je

$$\|\mu\| = |\mu|(K),$$

kde $|\mu|$ značí totální variaci míry μ . Jedná se o Banachův prostor.

(4) Označme

$$c_{00} = \{x = (x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}; x_n = 0 \text{ až na konečně mnoho } n\}.$$

S normou $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ je c_{00} normovaný lineární prostor, ale není Banachův.

Definice 12 (ekvivalentní normy). Necht' X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ jsou normy na X . Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 13. Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. □

Lemma 14. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X , $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Tvrzení 15. Necht' X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení $\text{Id}: (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

(v) $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Definice 16. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Konvexním obalem M nazveme množinu $\text{conv } M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 17. Necht' X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak

$$\text{conv } M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i; x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce naznačen, studenti by jej orientačně měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Definice 18. Necht' X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 19. Necht' M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X , která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Definice 20. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\text{span}} M = \bigcap \{Y \supset M; Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\text{conv}} M = \bigcap \{C \supset M; C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 21. Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce naznačen, studenti by jej orientačně měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Tvrzení 22. Necht' X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\text{span}} M = \overline{\text{span } M}$ a $\overline{\text{conv}} M = \overline{\text{conv } M}$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Věta 23. Necht' X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\text{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

konec 2. přednášky (5. 10. 2026)

Důsledek 24. Necht' X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X .

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

2. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T: X \rightarrow Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x + y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 25. Necht' X, Y jsou vektorové prostory, $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení a $M \subset X$. Pak $T(-M) = -T(M)$ a $T(\text{conv } M) = \text{conv } T(M)$. Speciálně, je-li M symetrická, pak $T(M)$ je symetrická, a je-li M konvexní, pak $T(M)$ je konvexní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce naznačen, studenti by jej orientačně měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Tvrzení 26. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) T je spojitý.

(ii) T je spojitý v 0.

(iii) Existuje $C \geq 0$ tak, že $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(iv) T je lipschitzovské.

(v) $T(B_X)$ je omezená.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Prostor $\mathcal{L}(X, Y)$ s normou

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$

je normovaný lineární prostor.

Lemma 27. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf \{C \geq 0; \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ pro každé } x \in X\}$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Fakt 28. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X, Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \rightarrow T(x)$ v prostoru Y .

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Fakt 29. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\| \|S\|$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Věta 30. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X, Y)$ je Banachův prostor.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Definice 31. Necht' X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X .

Věta 32. Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Definice 33. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen *izomorfismus*), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- *izomorfismus* X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\text{Rng } T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen *izometrie*), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- *izometrie* X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y ;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y .

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y , pokud existuje lineární izomorfismus X do Y ;
- *izometricky vnořen* do Y , pokud existuje lineární izometrie X do Y .

Poznámka 34. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T: X \rightarrow Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 35. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory.

(a) $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je izomorfismus do, pak $\text{Rng } T$ je uzavřený v Y .

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Fakt 36. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Věta 37. Necht' $X, \hat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\hat{X}$ a Y je úplný. Necht' dále $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\hat{T} \in \mathcal{L}(\hat{X}, Y)$ rozšiřující T , tj. $\hat{T}|_X = T$. Navíc platí $\|\hat{T}\| = \|T\|$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, ale používá podstatně znalosti z metrických prostorů (které byly dokázány na cvičení), zkoušen proto nebude. □

konec 3. přednášky (7. 10. 2026)

Příklad 38. Kdykoliv X je nekonečně-dimenzionální Banachův prostor (nebo obecněji normovaný lineární prostor), pak existuje lineární zobrazení $f: X \rightarrow \mathbb{K}$, které není spojité.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

3. Řady v normovaných lineárních prostorech

Fakt 39. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ je konvergentní řada v X . Pak

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. $\square$

Definice 40. Necht' X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X . Symbol $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ . Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F: \left\| x - \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma \in \Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 41. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset: \left\| \sum_{\gamma \in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 42 (Nutná podmínka konvergence). Necht' $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru X . Pak je její součet určen jednoznačně a $(\|x_\gamma\|)_{\gamma \in \Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. $\square$

Věta 43. Necht' X je Banachův prostor.

(a) Zobecněná řada v X je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.

(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X je konvergentní.

(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma$ v X konvergentní a $\Lambda \subset \Gamma$, pak je i zobecněná řada $\sum_{\gamma \in \Lambda} x_\gamma$ konvergentní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. $\square$

Tvrzení 44. Necht' $\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma$ je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když

$$\sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma; F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma = \sup \left\{ \sum_{\gamma \in F} a_\gamma; F \in \mathcal{F}(\Gamma) \right\}.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. $\square$

konec 4. přednášky (12. 10. 2026)

Tvrzení 45. Necht' X je normovaný lineární prostor a $\{x_n\} \subset X$. Pak zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ je absolutně konvergentní, právě když řada $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ je absolutně konvergentní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. $\square$

Definice 46. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje *bezpodmínečně* (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 47. Necht' $\{x_n\}$ je posloupnost v Banachově prostoru X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konverguje bezpodmínečně.
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ke stejnému součtu.
- (iii) $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ konverguje pro každou permutaci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Věta 48. Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.
Každá řada v $\mathbb{R}$ je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Příklad 49. Necht' e_n je n -tý jednotkový vektor v ℓ_2 . Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ konverguje bezpodmínečně k prvku $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \in \ell_2$, ale nekonverguje absolutně:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{1}{n} e_n \right\|_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 50 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918)). Necht' X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X , pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\text{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Věta 51. Necht' X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) $\dim X < \infty$.
- (ii) Existuje $n \in \mathbb{N}_0$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
- (iii) B_X je kompaktní.
- (iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojitě.
- (v) Každá lineární forma na X je spojitá.
- (vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

5. Součty normovaných lineárních prostorů, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \leq p \leq \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x, y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \quad (1)$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Definice 52. Necht' $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

konec 5. přednášky (14. 10. 2026)

Definice 53. Necht' X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním* (též *algebraickým*) *součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \text{span}(A \cup B)$.

Definice 54. Necht' X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P: X \rightarrow X$ se nazývá (*lineární*) *projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Poznámka 55. Pro podprostory $A, B \subset X$ platí $X = A \oplus B$, právě když lze každý $x \in X$ právě jedním způsobem zapsat ve tvaru $x = a + b$, kde $a \in A$ a $b \in B$.

Je-li $P: X \rightarrow X$ lineární projekce, pak

$$X = \text{Rng } P \oplus \text{Ker } P,$$

přičemž P je projekce na $\text{Rng } P$ a $\text{Id}_X - P$ je projekce na $\text{Ker } P$. Naopak, je-li $X = A \oplus B$, pak předpis

$$P_A(a + b) = a, \quad a \in A, b \in B,$$

definuje lineární projekci P_A splňující $\text{Rng } P_A = A$ a $\text{Ker } P_A = B$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. $\square$

Definice 56. Necht' X je normovaný lineární prostor. Podprostor $Y \subset X$ se nazývá *komplementovaný* v X , jestliže existuje spojitá lineární projekce $P: X \rightarrow X$ s $\text{Rng } P = Y$. Lze-li navíc zvolit $\|P\| \leq C$, říkáme, že Y je *C-komplementovaný*.

Věta 57. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Pak

- Y je isomorfní komplementovanému podprostoru X , právě když existují spojitě lineární operátory $S: X \rightarrow Y$ a $T: Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{Id}_Y$;
- Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X , právě když existují spojitě lineární operátory $S: X \rightarrow Y$ a $T: Y \rightarrow X$ splňující $S \circ T = \text{Id}_Y$ a $\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. $\square$

6. Prostory se skalárním součinem

Definice 58. Skalárním součinem na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

- (i) funkce $x \mapsto \langle x, y \rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pro každé $x, y \in X$,
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Tvrzení 59 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost). Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak

- (i) $|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ pro každé $x, y \in X$.
- (ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X .

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. $\square$

Fakt 60. Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \text{Re} \langle x, y \rangle.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. $\square$

Tvrzení 61 (rovnoběžníkové pravidlo). Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. $\square$

Definice 62. Necht' X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$.

Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$.

Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A, y \in B$, což značíme $A \perp B$.

Množina $A^\perp = \{x \in X; x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A .

Fakt 63 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.). *Necht' X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \dots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2.$$

Důkaz. Důkaz byl na přednášce jiného předmětu, zkoušen nebude. □

Lemma 64. *Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Tvrzení 65. *Necht' $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ je spojitá.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, může být zkoušen. □

Tvrzení 66 (polarizační vzorec). *Necht' X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

v komplexním případě.

Důkaz. Důkaz byl na přednášce pro reálný případ, komplexní případ byl jen naznačen. Důkaz samostatně zkoušen nebude. □

Důsledek 67. *Necht' X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T: X \rightarrow Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Důkaz. Důkaz byl na přednášce, studenti by jej měli znát, je ale natolik jednoduchý, že samostatně zkoušen nebude. □

Věta 68 (Jordan - von Neumann). *Necht' $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak $\|\cdot\|$ je generovaná nějakým skalárním součinem, právě když $\|\cdot\|$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo (tj. rovnost z Tvrzení 61).*

konec 6. přednášky (19. 10. 2026)

7. Hilbertovy prostory

Definice 69. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Příklad 70 (základní Hilbertovy prostory). *Necht' I je množina a $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou. Příklady Hilbertových prostorů jsou*

- $\ell_2(I)$ se skalárním součinem

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} x_i \overline{y_i};$$

pro konečné I dostáváme eukleidovský prostor $\mathbb{K}^n$;

- $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K})$ se skalárním součinem

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f \overline{g} d\mu.$$

Prostor $\ell_2(I)$ je speciálním případem L_2 , vezmeme-li na I počítací míru. Podprostor Hilbertova prostoru je Hilbertovým prostorem právě tehdy, když je uzavřený.

Věta 71 (Frigez Riesz, 1934). *Necht' C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H . Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$.*

Lemma 72 (F. Riesz, 1934). *Necht' X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \text{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Věta 73 (F. Riesz, 1934). *Necht' Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H . Pak $H = Y \oplus Y^\perp$ a příslušná projekce $P_Y: H \rightarrow Y$ má následující vlastnosti:*

(i) $\|P_Y(x) - x\| = \text{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ pro každé $x \in H$,

(ii) $\|P_Y\| \leq 1$.

Věta 74. Necht' H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje.

(ii) Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně.

(iii) $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2 < \infty$.

V tomto případě platí $\|\sum_{n=1}^\infty x_n\|^2 = \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2$.

Definice 75. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- ortogonální, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- ortonormální, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$;
- ortonormální báze prostoru X , pokud je ortonormální a $\overline{\text{span}} A = X$.

Příklad 76 (ortonormální báze). • V prostoru $\ell_2(\mathbb{N})$ tvoří kanonické jednotkové vektory $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ortonormální bázi.

- V prostoru $L_2([0, l]; \mathbb{R})$ tvoří ortonormální bázi reálný trigonometrický systém

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \cos\left(\frac{2\pi kx}{l}\right), \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{2\pi kx}{l}\right) : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

- V prostoru $L_2([0, l]; \mathbb{C})$ tvoří ortonormální bázi komplexní trigonometrický systém

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l}} \exp\left(\frac{2\pi i kx}{l}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Poznámka 77. V separabilním prostoru se skalárním součinem je každá ortonormální množina spočetná: její různé prvky mají vzdálenost $\sqrt{2}$, je tedy diskretní.

Věta 78. Každý ortonormální systém v prostoru se skalárním součinem lze rozšířit na ortonormální systém, který není vlastní podmnožinou žádného dalšího ortonormálního systému.

Věta 79 (Besselova nerovnost). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, pak pro každé $x \in X$ platí

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Věta 80. Necht' H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální systém v H . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ je ortonormální báze H .

(ii) $x = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle e_\gamma$ pro každé $x \in H$.

(iii) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2$ pro každé $x \in H$ (Parsevalova rovnost).

(iv) Soustavu $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ nelze rozšířit přidáním dalšího jednotkového vektoru kolmého ke všem e_γ .

Důsledek 81. Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.

Věta 82 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907)). Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H , je zobrazení $T: H \rightarrow \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ .

Věta 83 (vyjádření ortogonální projekce). Necht' H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Necht' $(e_j)_{j \in J}$ je nějaká ortonormální báze prostoru Y . Pak projekci na Y podél $Y^\perp$ (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem

$$Px = \sum_{j \in J} \langle x, e_j \rangle e_j, \quad x \in H.$$

Věta 84 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934)). Necht' H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcional definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y \rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I: H \rightarrow H^*$, $I(y) = f_y$ je sdružené lineární izometrie H na H^* .

Lemma 85. Necht' X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \text{Ker } f$. Pak $X = \text{Ker } f \oplus \text{span}\{x\}$.

8. Reálné a komplexní normované lineární prostory

Definice 86. Necht' X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X , s násobením reálným číslem jako v X a se stejně definovanou normou.

Věta 87 (reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru). *Necht' X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí:*

- (i) X_R je reálný normovaný lineární prostor.
- (ii) X_R je úplný, právě když X je úplný.
- (iii) $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}$ je lineární, právě když $\operatorname{Re} \varphi : X_R \rightarrow \mathbb{R}$ je lineární a $\operatorname{Im} \varphi(x) = -\operatorname{Re} \varphi(ix)$ pro každé $x \in X$.
- (iv) Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$.
- (v) Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \operatorname{Re} \varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\psi\| = \|\varphi\|$.
- (vi) Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické.

Definice 88. Necht' X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.
- $\|(x_1, x_2)\|_{X_C} = \sup\{\|(\cos \alpha)x_1 + (\sin \alpha)x_2\|_X; \alpha \in [0, 2\pi)\}$, $x_1, x_2 \in X$.

Symbolem $(X_C, \|\cdot\|)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_C})$.

Věta 89 (komplexifikace). *Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_C, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je X_C Banachův.*

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Definice 90. Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0, +\infty)$.

Funkce $p : X \rightarrow [0, +\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 91 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929)). *Necht' X je vektorový prostor a Y je podprostor X .*

- (a) *Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $F(x) \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*
- (b) *Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F|_Y = f$ a $|F(x)| \leq p(x)$ pro každé $x \in X$.*

Věta 92 (Hahnova-Banachova). *Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F|_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důsledek 93. *Necht' X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \neq f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důsledek 94 (Duální vyjádření normy). *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

Věta 95 (Oddělování bodu a podprostoru). *Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f|_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Věta 96 (Oddělování konvexních množin). *Necht' X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

- (a) *Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.*
- (b) *Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.*

2. Duální a adjungované operátory - základy

Definice 97. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Operátor $T^*: Y^* \rightarrow X^*$ definovaný předpisem

$$T^*f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T . (Ve Větě 98 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**} .

Věta 98. Necht' X, Y, Z jsou normované lineární prostory.

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, je $T^*f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X, Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $(Id_X)^* = Id_{X^*}$.

Věta 99. Necht' H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^* \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí

$$\langle Tx, y \rangle_{H_2} = \langle x, T^*y \rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^* = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j: H_j \rightarrow H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdružené lineární izometrie z Věty 84.

Definice 100. Operátor T^* z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T .

Věta 101. Necht' H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{**} = (T^*)^* = T$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Necht' $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $(Id_{H_1})^* = Id_{H_1}$.

3. Reprezentace duálů

Definice 102. Necht' $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p , pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 103 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům). Necht' $I \neq \emptyset$.

(a) Prostor $c_0(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_1(I)$ pomocí zobrazení $I: \ell_1(I) \rightarrow c_0(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p , pak prostor $\ell_p(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_q(I)$ pomocí zobrazení $I: \ell_q(I) \rightarrow \ell_p(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p , pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_q(\mu) \rightarrow L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ -konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_{\infty}(\mu)$ pomocí zobrazení $I: L_{\infty}(\mu) \rightarrow L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_{\Omega} fg \, d\mu.$$

Věta 104. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Necht' q je sdružený exponent k p . Pak zobrazení $I: X^* \oplus_q Y^* \rightarrow (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem

$$I(f, g)(x, y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Definice 105. Necht' K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 106 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$). *Necht' K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f d\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Věta 107 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$). *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I: M(K) \rightarrow C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

4. Kvocienty normovaných lineárních prostorů

Necht' X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\hat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x , tedy

$$\hat{x} = \{y \in X; y \sim x\} = \{y \in X; y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\hat{x}; x \in X\}$$

definujeme operace $\hat{x} + \hat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha \hat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\hat{x}, \hat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 108. Necht' X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y .

Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q: X \rightarrow X/Y$ předpisem $q(x) = \hat{x}$.

Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\|\hat{x}\|_{X/Y} = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \text{dist}(x, Y),$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 109. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q: X \rightarrow X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na X splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 110. *Necht' X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Poznámka 111. Topologie indukovaná kvocientovou normou na X/Y je právě kvocientová topologie známá z Obecné topologie, tj. největší topologie na X/Y , pro kterou je $q: X \rightarrow X/Y$ spojitý. Vskutku, podle Tvrzení 109 je q spojitý a z rovnosti $q(U_X) = U_{X/Y}$ plyne, že je otevřený. Proto pro $V \subset X/Y$ platí

$$V \text{ je otevřená} \iff q^{-1}(V) \text{ je otevřená v } X.$$

Fakt 112 (univerzální vlastnost kvocientové topologie). *Necht' Z je topologický prostor a $g: X/Y \rightarrow Z$ libovolné zobrazení. Pak g je spojitý, právě když $g \circ q: X \rightarrow Z$ je spojitý.*

Tvrzení 113 (faktorizace přes kvocient). *Necht' X a Z jsou normované lineární prostory, $Y \subset X$ je uzavřený podprostor a $T \in \mathcal{L}(X, Z)$ splňuje $Y \subset \text{Ker } T$. Pak existuje právě jeden operátor $\tilde{T} \in \mathcal{L}(X/Y, Z)$ takový, že $T = \tilde{T} \circ q$. Navíc $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. Je-li $Y = \text{Ker } T$, pak je $\tilde{T}$ prostý.*

Poznámka 114. Necht' $T \in \mathcal{L}(X, Z)$. Řekneme, že T je *izometrický kvocient*, pokud je na X a $T(U_X) = U_Z$. Ekvivalentně, T je na $X/\tilde{T}$ je izometrie prostoru $X/\text{Ker } T$ na Z .

Definice 115. Necht' X je vektorový prostor a Y jeho podprostor. Podprostor $A \subset X$ se nazývá *algebraický doplněk* podprostoru Y v X , jestliže $X = Y \oplus A$.

Věta 116. *Necht' X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) *Prostor Y má algebraický doplněk v X .*

(b) *Každý algebraický doplněk Y v X je algebraicky izomorfní s X/Y . Speciálně, každé dva algebraické doplňky Y v X jsou algebraicky izomorfní.*

Definice 117. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenze* Y v X (značíme $\text{codim } Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y v X , tj. $\text{codim } Y = \dim(X/Y)$.

Poznámka 118. Je-li f nenulová lineární forma na X , pak podle Lemmatu 85 platí $\text{codim Ker } f = 1$.

Věta 119. *Necht' X je normovaný lineární prostor.*

- (a) *Každý konečněrozměrný podprostor prostoru X je komplementovaný.*
- (b) *Každý uzavřený podprostor prostoru X konečné kodimenze je komplementovaný.*

5. Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

Definice 120. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*; f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_\perp = \{x \in X; f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 121. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

- (a) $A^\perp$ je uzavřený podprostor X^* ,
- (b) $B_\perp$ je uzavřený podprostor X ,
- (c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\text{span}} A$,
- (d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\text{span}} B$.

Poznámka 122. Obecně neplatí $(B_\perp)^\perp = \overline{\text{span}} B$. Například pro $X = \ell_1$ a $B = c_0 \subset X^* = \ell_\infty$ je $B_\perp = \{0\}$, neboť B obsahuje všechny kanonické vektory. Tedy $(B_\perp)^\perp = \ell_\infty$, zatímco $\overline{\text{span}} B = c_0$.

Věta 123. *Necht' X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

- (a) *Je-li Y uzavřený a $q: X \rightarrow X/Y$ je kanonické kvocientové zobrazení, pak $q^*: (X/Y)^* \rightarrow X^*$ je lineární izometrie na $Y^\perp$.*
- (b) *Restrikční operátor $R: X^* \rightarrow Y^*$, $R(f) = f|_Y$, je izometrický kvocient. Jeho faktorizace $\hat{R}: X^*/Y^\perp \rightarrow Y^*$ je tedy lineární izometrie na.*

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

Věta 124. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak platí*

- (a) $\text{Ker } T^* = (\text{Rng } T)^\perp$,
- (b) $\text{Ker } T = (\text{Rng } T^*)_\perp$,
- (c) $\overline{\text{Rng } T} = (\text{Ker } T^*)_\perp$,
- (d) T^* je prostý, právě když $\text{Rng } T$ je hustý.

6. Druhý duál a reflexivita

Definice 125. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^* . Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.*

*Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.*

Definice 126. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}* .*

Tvrzení 127. *Necht' X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon: X \rightarrow X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Tvrzení 128 (J. P. Schauder, 1930). *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X: X \rightarrow X^{**}$ a $\varepsilon_Y: Y \rightarrow Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Věta 129. Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor.

Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X , pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2 , která je na X identitou.

Věta 130. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(b) T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.

Speciálně, jsou-li X a Y "lineárně izometrické" pak jsou také X^* a Y^* "lineárně izometrické".

Definice 131. Banachův prostor X se nazývá reflexivní, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 132. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 133.

(a) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(b) Každý Hilbertův prostor je reflexivní.

(c) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(d) Prostory $c_0, \ell_1, \ell_\infty, L_1([0, 1]), L_\infty([0, 1])$ a $C([0, 1])$ nejsou reflexivní.

(e) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**} .

Věta 134 (James). Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.

Poznámka 135. Platí následující Bishopova–Phelpsova věta: Je-li X Banachův prostor, pak množina

$$\{x^* \in X^* : \text{existuje } x \in B_X \text{ takové, že } |x^*(x)| = \|x^*\|\}$$

je hustá v X^* . Jamesova věta tedy charakterizuje reflexivitu tím, že normy nabývají všechny funkcionály, nikoli pouze jejich hustá podmnožina.

7. Slabé konvergence posloupností

Definice 136. Necht' X je normovaný lineární prostor.

(a) Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru X *slabě konverguje* k $x \in X$ (značíme $x_n \xrightarrow{w} x$), pokud pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x_n) \rightarrow x^*(x)$.

(b) Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\}$ v prostoru X^* *slabě s hvězdičkou konverguje* k $x^* \in X^*$ (značíme $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$), pokud pro každé $x \in X$ platí $x_n^*(x) \rightarrow x^*(x)$.

Lemma 137. Necht' X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ posloupnost v X a $\{x_n^*\}$ posloupnost v X^* .

(a) Existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Existuje nejvýše jedno $x^* \in X^*$ splňující $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

(c) Pokud $x \in X$ a $x_n \rightarrow x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.

(d) Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Poznámka 138. Opačné implikace v (c) a (d) obecně neplatí. Kanonická báze (e_n) prostoru ℓ_2 konverguje slabě k nule, ale nekonverguje k nule v normě. Podobně (e_n) v $\ell_1 = c_0^*$ konverguje slabě* k nule, ale nikoli slabě, neboť funkcionál $(1, 1, \dots) \in \ell_\infty = \ell_1^*$ nabývá na všech e_n hodnoty 1.

Tvrzení 139 (Slabá polospojítost normy). *Necht' X je normovaný lineární prostor.*

(a) *Je-li $x_n \xrightarrow{w} x$ v X , pak $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$.*

(b) *Je-li $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$ v X^* , pak $\|x^*\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n^*\|$.*

Věta 140 (Princip stejnoměrné omezenosti). *Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) *Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|; T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.*

Důsledek 141. *Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X, Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ a $\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \in \mathbb{R}$.*

Důsledek 142 (Omezenost slabě a slabě* konvergentních posloupností). *Necht' X je Banachův prostor.*

(a) *Každá slabě konvergentní posloupnost v X je omezená.*

(b) *Každá slabě* konvergentní posloupnost v X^* je omezená.*

Tvrzení 143. *Necht' X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^* , $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X$. Pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \rightarrow x^*(d)$ pro každé $d \in D$.*

Tvrzení 144. *Necht' X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X , $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\text{span}} D = X^*$. Pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(d) \rightarrow x(d)$ pro každé $d \in D$.*

Příklady 145. Pro následující Banachovy prostory X , posloupnost $\{x_n\}$ v X a $x \in X$ platí:

(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$ pro $p \in (1, \infty)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \rightarrow x(i)$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

(b) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \rightarrow x(k)$ pro každé $k \in K$.

(c) Pokud $X = \ell_1$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$, právě když $x_n \rightarrow x$ v normě (Schurova vlastnost).

Příklad 146 (Slabá* konvergence v posloupnostních prostorech). Pro $1 \leq p \leq \infty$ uvažujeme ℓ_p jako duál pomocí kanonických identifikací

$$\ell_1 = c_0^*, \quad \ell_p = \ell_q^* \quad (1 < p < \infty), \quad \ell_\infty = \ell_1^*,$$

kde q je sdružený exponent k p . Pro posloupnost $\{x_n\}$ v ℓ_p a $x \in \ell_p$ potom platí: $x_n \xrightarrow{w^*} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \rightarrow x(i)$ pro každé $i \in \mathbb{N}$.

Věta 147. *Necht' X je normovaný lineární prostor a X^* je separabilní. Pak X je separabilní.*

Věta 148. *Necht' X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ omezená posloupnost v X^* . Pak $\{x_n^*\}$ má w^* -konvergentní podposloupnost.*

Věta 149. *Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená posloupnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.*

III. Omezené operátory v Banachových prostorech

1. Kompaktní operátory

Definice 150. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y .*

Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\text{Rng } T$ má konečnou dimenzi.

V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 151. *Necht' X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T: X \rightarrow Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X , pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Věta 152. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory.

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

Tvrzení 153. Necht' X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{K}(X, Y)$. Je-li $x_n \xrightarrow{w} x$ v X , pak $T(x_n) \rightarrow T(x)$ v normě prostoru Y .

Definice 154. Necht' (K, ρ) je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A} \subset C(K)$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je stejně spojitá, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pro všechna $f \in \mathcal{A}$ a $x, y \in K$ s $\rho(x, y) < \delta$.

Věta 155 (Arzelàova–Ascoliho). Necht' K je kompaktní metrický prostor a $\mathcal{A} \subset C(K)$. Pak $\mathcal{A}$ je relativně kompaktní v $C(K)$, právě když je omezená a stejně spojitá.

Věta 156 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.

2. Věty o otevřeném zobrazení a uzavřeném grafu

Definice 157. Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá otevřené, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 158 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.

Lemma 159 (J. P. Schauder, 1930). Necht' X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0, s) \subset T(U(0, r))$, pak dokonce $U(0, s) \subset T(U(0, r))$.

Důsledek 160 (S. Banach, 1929). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y , právě když T je prostý a na.

Důsledek 161. Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je na. Pak platí:

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\hat{T}: X/\text{Ker } T \rightarrow Y$ dané předpisem $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\text{Ker } T$.

Tvrzení 162 (kritérium uzavřenosti obrazu). Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) $\text{Rng } T$ je uzavřený;

(ii) indukovaný operátor $\hat{T}: X/\text{Ker } T \rightarrow Y$, $\hat{T}(\hat{x}) = T(x)$, je izomorfismus do;

(iii) existuje $C > 0$ takové, že $\text{dist}(x, \text{Ker } T) \leq C\|T(x)\|$ pro každé $x \in X$.

Definice 163. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je topologickým součtem A a B , pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojitě. Tento fakt značíme $X = A \oplus_t B$.

Podprostor B se v tomto případě nazývá topologický doplněk podprostoru A v X .

Věta 164. Necht' X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když zobrazení

$$T: X \rightarrow Y \oplus_1 Z, \quad T(x) = (P_Y(x), P_Z(x)),$$

je izomorfismus.

Věta 165. *Necht' X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_t Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.*

Definice 166. Je-li $f: X \rightarrow Y$ zobrazení množiny X do množiny Y , pak množinu

$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f* .

Říkáme, že zobrazení $f: X \rightarrow Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, má *uzavřený graf*, pokud množina graf f je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 167 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932). *Necht' X, Y jsou Banachovy prostory a $T: X \rightarrow Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojitý, právě když má uzavřený graf.*

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 168. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Tvrzení 169. *Necht' X je Banachův prostor.*

(a) *Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $\text{Id}_X - T$ je inveribilní a platí $(\text{Id}_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.*

(b) *Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, pak S je invertovatelný a $S^{-1} = T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (I - ST^{-1})^n$. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.*

Definice 170. *Necht' X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T , pokud $\text{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X, x \neq 0$.*

Prostor $\text{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ .

Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ .

Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_p(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Rezolventní množina operátoru T je $\rho(T) := \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. *Rezolventní funkce* je definována jako $\rho(T) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Věta 171. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li $X \neq \{0\}$ komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Věta 172. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)}$*

Věta 173. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(a) *Jestliže $\text{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \text{Rng}(T) < \infty$.*

(b) *Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.*

(c) *Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \text{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\text{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.*

Věta 174 (Fredholmova alternativa). *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 175. *Necht' X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T)$.*

Lemma 176. *Necht' X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 177. *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K}; |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 178. *Necht' X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T , přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Věta 179 (Druhá Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\begin{aligned} \text{Rng}(\lambda I_X - T) &= (\text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*))_{\perp}, \\ \text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) &= (\text{Ker}(\lambda I_X - T))^{\perp}. \end{aligned}$$

Věta 180 (Třetí Fredholmova věta). *Necht' X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \text{Ker}(\lambda I_X - T) = \text{codim} \text{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \text{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \text{codim} \text{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

4. Samoadjungované kompaktní operátory na Hilbertově prostoru

Definice 181. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Řekneme, že T je *samoadjungovaný*, pokud $T = T^*$.

Definice 182. Hermitovskou seskvilineární formou na vektorovém prostoru X rozumíme zobrazení $b: X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ takové, že $x \mapsto b(x, y)$ je lineární pro každé $y \in X$ a $b(x, y) = \overline{b(y, x)}$ pro všechna $x, y \in X$. Forma b je potom automaticky sdruženě lineární ve druhé proměnné.

(Jde tedy o definici skalárního součinu bez podmínek (iii) a (iv).)

Fakt 183. Necht' b je hermitovská seskvilineární forma na X a $q(x) = b(x, x)$. Pak $q(x) \in \mathbb{R}$, $q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x)$ a $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2 \operatorname{Re} b(x, y)$. Speciálně $q(x + y) - q(x - y) = 4 \operatorname{Re} b(x, y)$.

Věta 184. Necht' H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$ pro všechna $x, y \in H$. Pro samoadjungovaný T platí $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$ a

$$\|T\| = \sup_{x \in S_H} |\langle Tx, x \rangle|.$$

Lemma 185 (Vlastní číslo příslušné normě). Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je nenulový samoadjungovaný operátor. Pak existují $e \in S_H$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$Te = \lambda e, \quad |\lambda| = \|T\|.$$

Tedy alespoň jedno z čísel $\|T\|$ a $-\|T\|$ je vlastním číslem operátoru T .

Definice 186. Podprostor Y vektorového prostoru X se nazývá *invariantní* vůči lineárnímu operátoru $T: X \rightarrow X$, pokud $T(Y) \subset Y$.

Lemma 187. Necht' H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$ je samoadjungovaný.

(a) Všechna vlastní čísla T jsou reálná. Vlastní prostory příslušné různým vlastním číslům jsou navzájem ortogonální.

(b) Je-li $Y \subset H$ uzavřený podprostor invariantní vůči T , pak je invariantní i $Y^\perp$ a restrikce $T|_Y$ a $T|_{Y^\perp}$ jsou samoadjungované.

Věta 188 (Spektrální rozklad; D. Hilbert (1904), E. Schmidt (1907)). Necht' H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je samoadjungovaný. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T .

Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům je nejvýše spočetně mnoho. Seřadíme-li je do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, kde $N \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, pak tato posloupnost tvoří ortonormální bázi $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ platí

$$Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n,$$

kde $Te_n = \lambda_n e_n$. Pro $T = 0$ je $N = 0$ a součet je prázdný.

IV. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

V celém tomto oddílu je $\mu = c\lambda_d$, kde $c > 0$ a λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 189. Necht' $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Posunem funkce f o y rozumíme funkci $\tau_y f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x - y)$.

Definice 190. Necht' $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ jsou měřitelné funkce. Jejich *konvolucí* rozumíme funkci $f * g$ definovanou předpisem

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) d\mu(y)$$

v těch bodech $x \in \mathbb{R}^d$, v nichž integrál existuje.

Poznámka 191. Pro konvoluci platí následující základní fakta.

- Pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ je funkce $y \mapsto f(y)g(x - y)$ měřitelná. Navíc funkce $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$ je měřitelná na $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.
- Funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.
- Platí $f * (g + h) = f * g + f * h$ a $(f + g) * h = f * h + g * h$ všude, kde jsou definovány oba integrály na příslušné pravé straně.

- Je-li $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována na D , pak je její restrikce na D měřitelná.

První bod ověříme nejprve pro borelovsky měřitelné reprezentanty f_0, g_0 , kdy plyne ze spojitosti zobrazení $y \mapsto x - y$ a $(x, y) \mapsto (y, x - y)$. Obecný případ dostaneme z faktu, že každá lebesgueovsky měřitelná funkce má borelovského reprezentanta: příslušné funkce se od borelovských verzí liší jen na nulových množinách, neboť translace a invertibilní lineární zobrazení zachovávají nulové množiny. Druhý bod dostaneme s pomocí substituce $z = x - y$, třetí z Fubiniovy věty aplikované na kladné a záporné části reálné a imaginární části funkce $(x, y) \mapsto f(y)g(x - y)$.

Definice 192. Prostor $L_1^{\text{loc}}(\mu)$ tvoří všechny měřitelné funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$, pro něž $\int_K |f| d\mu < \infty$ pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^d$.

Věta 193. Je-li $f \in L_p(\mu)$, kde $1 \leq p < \infty$, pak zobrazení $\tau: \mathbb{R}^d \rightarrow L_p(\mu)$, $\tau(y) = \tau_y f$, je stejnoměrně spojitě.

Věta 194. Necht' $f, g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$ jsou měřitelné funkce.

(a) Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \leq p, q \leq \infty$ jsou sdružené exponenty, pak je $f * g$ definována v každém bodě, je omezená a stejnoměrně spojitá a platí

$$\|f * g\|_{\infty} \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

(b) Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak je $f * g$ definována skoro všude, patří do $L_1(\mu)$ a platí

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

(c) Je-li $f \in L_1^{\text{loc}}(\mu)$ a $g \in L_{\infty}(\mu)$ je nulová skoro všude mimo nějakou kompaktní množinu K , pak je $f * g$ definována v každém bodě a je spojitá. Je-li navíc $f = 0$ skoro všude mimo nějakou uzavřenou množinu A , pak $\text{supp}(f * g) \subset A + K$.

Definice 195. Necht' $d \in \mathbb{N}$. Prvek $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem*; jeho řád je $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$. Píšeme

$$D^{\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

přičemž faktory s $\alpha_j = 0$ vynecháváme a $D^0 f = f$.

Definice 196. Pro $\varphi \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ položíme $\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d; \varphi(x) \neq 0\}}$. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, pak

$$\mathcal{D}(\Omega, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K}); \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } \Omega\}$$

je prostor testovacích funkcí na Ω .

Věta 197. Je-li $f \in L_1^{\text{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex α platí $D^{\alpha}(f * g) = f * D^{\alpha}g$.

Definice 198. Funkci $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ nazveme *zhlazovacím jádrem*, pokud $\rho \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho d\mu = 1$ a $\text{supp } \rho \subset \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ položíme $\rho_n(x) = n^d \rho(nx)$.

Poznámka 199. Zhlazovací jádro získáme například volbou

$$\rho(x) = c \begin{cases} \exp(-1/(1 - \|x\|^2)), & \|x\| < 1, \\ 0, & \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

kde konstantu $c > 0$ zvolíme tak, aby $\int_{\mathbb{R}^d} \rho d\mu = 1$.

Pro každé n platí $\rho_n \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_n d\mu = 1$ a $\text{supp } \rho_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\| \leq 1/n\}$.

Věta 200. Necht' ρ je zhlazovací jádro a $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{K}$.

(a) Je-li f spojitá, pak $\rho_n * f \rightarrow f$ lokálně stejnoměrně. Je-li navíc f stejnoměrně spojitá, je konvergence stejnoměrná na celém $\mathbb{R}^d$.

(b) Je-li $f \in L_p(\mu)$, kde $1 \leq p < \infty$, pak $\rho_n * f \rightarrow f$ v $L_p(\mu)$.

Důsledek 201. Je-li $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená a $1 \leq p < \infty$, pak je $\mathcal{D}(\Omega)$ hustá v $L_p(\Omega, \mu)$ ve smyslu restrikce na Ω .

2. Fourierova transformace

V tomto oddílu uvažujeme všechny prostory funkcí nad $\mathbb{C}$. Pro $d \in \mathbb{N}$ položíme $\mu_d = (2\pi)^{-d/2} \lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$. Zápisem $L_p(\mathbb{R}^d)$ budeme v tomto oddílu rozumět prostor $L_p(\mu_d)$ a také konvoluci budeme uvažovat vzhledem k míře μ_d .

Definice 202. Necht' $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. *Fourierovou transformací funkce f rozumíme funkci $\widehat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ definovanou předpisem*

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x \rangle} d\lambda_d(x), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Poznámka 203. Komplexní skaláry jsou zde přirozené, protože Fourierovo jádro $e^{-i\langle t, x \rangle}$ je komplexní a Fourierova transformace reálné funkce obecně není reálná. Je-li však f reálná, pak $\widehat{f}(-t) = \overline{\widehat{f}(t)}$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

Fourierova transformace je spojitou obdobou komplexních Fourierových koeficientů známých z matematické analýzy: diskrétní parametr $k \in \mathbb{Z}$ je nahrazen spojitým parametrem $t \in \mathbb{R}^d$ a integrál přes jednu periodu integrálem přes celé $\mathbb{R}^d$.

Definice 204. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ rozumíme prostor spojitých funkcí $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina

$$\{x \in \mathbb{R}^d; |f(x)| \geq \varepsilon\}$$

omezená. Na tomto prostoru uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Pro funkci $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ je tedy $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, právě když je f spojitá a $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Poznámka 205. Prostor $C_0(\mathbb{R}^d)$ je Banachův, neboť je uzavřeným podprostorem Banachova prostoru $\ell_\infty(\mathbb{R}^d)$. Vskutku, je-li $f_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $f_n \rightarrow f$ stejnoměrně, pak je f spojitá. Navíc pro $\varepsilon > 0$ zvolíme n tak, aby $\|f - f_n\|_\infty < \varepsilon/2$. Protože f_n mizí v nekonečnu, existuje $R > 0$ takové, že $|f_n(x)| < \varepsilon/2$ pro $\|x\| > R$. Pro taková x tedy platí $|f(x)| < \varepsilon$, a tudíž $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Věta 206. Necht' $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Pak platí následující tvrzení.

(a) Funkce $\widehat{f}$ je omezená a spojitá a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(b) Je-li $y \in \mathbb{R}^d$, pak

$$\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y, t \rangle} \widehat{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Pro funkci $h(x) = e^{i\langle y, x \rangle} f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(x/c)$, pak $\widehat{h}(t) = c^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \widehat{\widehat{f}}$.

(e) Platí $\widehat{f * g} = \widehat{f} \widehat{g}$.

(f) Platí

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) g(t) d\mu_d(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \widehat{g}(x) d\mu_d(x).$$

Lemma 207 (Georg Friedrich Bernhard Riemann, Henri Lebesgue). Je-li $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, pak

$$\lim_{\|t\| \rightarrow \infty} \widehat{f}(t) = 0.$$

Důsledek 208. Fourierova transformace je spojitě lineární zobrazení

$$\mathcal{F}: L_1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$$

s normou nejvýše 1.

Poznámka 209. Předchozí lemma je obdobou Riemannova–Lebesgueova lemmatu pro Fourierovy koeficienty: posloupnost koeficientů tam konverguje k nule, zatímco zde $\widehat{f}(t) \rightarrow 0$ pro $\|t\| \rightarrow \infty$.

Pro $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ a $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ budeme psát $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$.

Definice 210. Schwartzovým prostorem na $\mathbb{R}^d$ rozumíme prostor

$$\mathcal{S}_d = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}); \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|^2)^N |D^\alpha f(x)| < \infty \text{ pro každé } N \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathbb{N}_0^d \right\}.$$

Tvrzení 211. Schwartzův prostor má následující vlastnosti.

(a)

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mathbb{R}^d).$$

Speciálně je $\mathcal{S}_d$ hustý v $L_p(\mathbb{R}^d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

(c) Je-li $f, g \in \mathcal{S}_d$, pak $fg \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$ s komplexními koeficienty, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 212. Necht' $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$. Potom platí:

(a) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$ pro $x \in \mathbb{R}^d$;

(b) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$;

(c) Fourierova transformace zobrazuje $\mathcal{S}_d$ lineárně do $\mathcal{S}_d$.

Lemma 213. Pro funkci

$$\varphi_d(x) = e^{-\|x\|^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

platí $\varphi_d \in \mathcal{S}_d$ a $\widehat{\varphi_d} = \varphi_d$.

Věta 214 (o inverzi na Schwartzově prostoru). Pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ a $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} d\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Fourierova transformace je tedy lineární bijekce $\mathcal{S}_d$ na $\mathcal{S}_d$ a její čtvrtá mocnina je identita.

Lemma 215. Necht' $u \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x) \varphi(x) d\mu_d(x) = 0 \quad \text{pro každou } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}).$$

Potom $u = 0$ skoro všude.

Věta 216 (o inverzi). Necht' $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Potom pro skoro každé $x \in \mathbb{R}^d$ platí

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) e^{i\langle x, t \rangle} d\mu_d(t) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, platí tato rovnost pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 217. Fourierova transformace $\mathcal{F}: L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ je prostá.

Důsledek 218. Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí

$$\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Speciálně je $\mathcal{S}_d$ uzavřený na konvoluci.

Věta 219 (Michel Plancherel, 1910). Existuje právě jedna surjektivní lineární izometrie

$$\mathcal{F}_2: L_2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$$

taková, že $\mathcal{F}_2 f = \widehat{f}$ pro každé $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$.

Poznámka 220. Pro obecné $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ je $\mathcal{F}_2 f$ určena pouze jako prvek $L_2(\mathbb{R}^d)$, tedy jako třída funkcí shodných skoro všude.