

# KALKULUS 2, 2024–2025

## POPIS PŘEDMĚTU A INFORMACE K ZÁPOČTU A KE ZKOUŠCE

MAREK CÚTH

### POPIS PŘEDMĚTU

Jde o třetí část čtyřsemestrálního základního kursu matematické analýzy pro studenty oboru finanční matematika. Věnuje se funkcím více proměnných, stejnoměrné konvergenci funkcí, mocninným řadám a teorii míry a integrálu. Kurs se skládá z přednášek a cvičení, je hodnocen zápočtem a zkouškou.

*Přednáška* se koná pro větší množství studentů najednou, přičemž přednášející u tabule vykládá především teoretické poznatky a ilustrativní příklady. Otázky v průběhu přednášky a diskuse po ní jsou vítány, jiná forma studentské aktivity se nepředpokládá. Z látky přednášené na přednášce je potřeba složit zkoušku. Seznam přednesených definic/vět a vzorově spočítaných příkladů bude postupně aktualizován na webu přednášejícího.

*Cvičení* se koná pro menší množství studentů najednou. Na cvičeních se počítají příklady určené k procvičení dané tematiky. S aktivní účastí studentů (někdy i u tabule) se počítá. Náplň a formu cvičení určuje cvičící. Z početních technik prováděných na cvičeních je potřeba složit zápočet.

### ZÁPOČET

Postačující podmínkou pro udělení zápočtu jsou dvě splněné zápočtové písemky.

Během semestru budou uspořádány celkem dvě zápočtové písemky. Čas k vypracování každé zápočtové písemky je 80 minut, student za každou zápočtovou písemku může získat maximálně 20 bodů. Povoleny jsou pouze psací potřeby. Písemka je hodnocena jako *splněná*, pokud student získá alespoň 7 bodů. V případě nesplnění zápočtové písemky je možné si písemku opravit dodatečným vypracováním tolika příkladů, kolik bodů studentovi chybí do sedmi. V těchto případech je nutná individuální domluva s cvičícím. Student se sám svému cvičícímu o příklady přihlásí, pokud to neudělá do sedmi dnů od obdržení výsledku zápočtové písemky, ztrácí nárok na zápočet.

Plánované datum jednotlivých zápočtových úloh je 4.11. (funkce více proměnných) a 9.12. (stejnomořná konvergence, mocninné řady a vícerozměrný integrál). Plánované datum přidělení zápočtových úloh se může změnit, v takovém případě budou studenti informováni o příslušné změně nejpozději 14 dní předem.

### ZKOUŠKA

Zkoušku mohou skládat studenti, kteří mají předmět Kalkulus 2 pro tento semestr řádně zapsán v Studijním informačním systému, a kteří v tomto semestru získali zápočet z Kalkulu 2. Zkouška má dvě části - písemnou a ústní. K tomu, aby student mohl skládat ústní část, musí úspěšně absolvovat písemnou část. Pokud student neuspěje u zkoušky a má právo na opravný termín, musí znovu absolvovat celou zkoušku (tedy včetně písemné části bez ohledu na předchozí výsledek písemné části). Na písemnou i ústní část s sebou student přinese doklad totožnosti (např. index, ISIC, občanský průkaz nebo cestovní pas).

**Písemná část.** Pro písemnou část zkoušky jsou vypsány termíny v SISu, žádné další termíny vypsány nebudou.

K písemné části zkoušky se mohou elektronicky prostřednictvím systému SIS přihlásit studenti, kteří získali zápočet.

Písemná část zkoušky bude obsahovat čtyři početní příklady z látky probírané v průběhu semestru. Celkem bude možné z písemné části zkoušky získat 50 bodů, je třeba získat alespoň 26 bodů. Jestliže student získá 25 nebo méně bodů, bude zkouška hodnocena známkou **neprospěl(a)**.

Student, který získá ze čtyř početních příkladů celkem alespoň 26 bodů, postoupí k ústní části zkoušky.

Čas k vypracování písemné části je 120 minut. Povoleny budou pouze běžné psací potřeby a tahák o velikosti jedné strany A4, který si student pro účely zkouškové písemky může sám připravit.

Odevzdané písemky budou opraveny během odpoledne/večera v den konání písemné části zkoušky. Výsledky písemné práce budou dostupné v SISu a studenti budou informováni mailem, že písemka je opravena. Ústní zkoušky se budou konat v budově MFF UK, Sokolovská 83 během jednoho až dvou dnů následujících po příslušném termínu písemky. Na ústní zkoušku se studenti přihlásí elektronicky prostřednictvím systému SIS, v případě že student k ústní části zkoušky nepostoupí, může si v příslušném čase prohlédnout svou písemnou práci a seznámit se s jejím detailním hodnocením.

**Ústní část.** Při ústní části zkoušky bude student mít za úkol zformulovat jednu definici a dvě věty. Dále pak bude mít za úkol prokázat, že definici a zformulovaným větám rozumí (typicky bude mít za úkol ukázat, jak konkrétně zformulovanou větu používá ve svých výpočtech v početní části). Dále pak bude student dotázán na jedno z témat z přednášky a měl by být schopen přehledově na dané téma poreferovat - v rámci této otázky bude student dotázán na důkaz/y. Nutnou podmínkou pro úspěšné složení zkoušky je znalost přednesených důkazů.

#### CELKOVÉ HODNOCENÍ ZKOUŠKY

K celkovému hodnocení známkou **výborně** je třeba, aby student s porozuměním ovládal definice a věty, byl schopen dokázat tvrzení která byla dokázána na přednášce a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti na více či méně jednoduchých teoretických příkladech.

K celkovému hodnocení známkou **velmi dobře** je třeba, aby student s porozuměním ovládal definice a věty, byl schopen dokázat lehčí tvrzení a byl schopen aplikovat dosažené vědomosti v jednoduchých teoretických příkladech. Může mít menší mezery v obtížnějších partiích.

K celkovému hodnocení známkou **dobře** je třeba, aby student s porozuměním ovládal definice, jednoduché věty teoretického rázu a všechny věty používané při počítání. Dále je nutné, aby student byl schopen dokázat jednoduchá tvrzení.

Hodnocení známkou **neprospěl(a)** bude uplatněno, jestliže se během zkoušky prokáže, že student neovládá věty nebo definice, není schopen dokázat ani velmi jednoduchá tvrzení z přednášky, nebo že některé větě nebo definici zásadně nerozumí.

## VZOROVÉ ZADÁNÍ PÍSEMNÉ ČÁSTI ZKOUŠKY

**Příklad 1.** Ukažte, že rovnice

$$\exp(xy + 2y) + 2 \exp(y + 2) = 3$$

určuje v jistém okolí bodu  $[-2, -2]$  implicitně zadanou funkci  $y = f(x)$ . Spočtěte  $f'(-2)$  a  $f''(-2)$ .

**Příklad 2.** Necht' je funkce  $f$  dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

- Nalezněte definiční obor funkce  $f$  (tj. určete pro která  $x \in \mathbb{R}$  je  $f(x) \in \mathbb{R}$ ).
- Dokažte, že funkce  $f$  je spojitá v bodě  $7/2$ .
- Dokažte, že funkce  $f$  má vlastní derivaci v bodě  $7/2$  a vyjádřete  $f'(7/2)$  jako součet číselné řady.

**Příklad 3.** Necht' je dána množina

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z\sqrt{x^2 + y^2} < 2, \sqrt{x^2 + y^2} < z + 1, z > 0\}.$$

- Proč je množina  $M$  měřitelná?
- Spočtěte míru  $\lambda^3(M)$  (hint: použijte válcové souřadnice).

**Příklad 4.** Uvažujme funkci  $F$  zadanou předpisem

$$F(a) := \int_1^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^7}} dx, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Dokažte, že  $F(a) \in \mathbb{R}$  pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Dokažte, že funkce  $F$  je spojitá na svém definičním oboru.
- Vyjádřete  $F'(a)$  pro  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
- Spočtěte  $\lim_{a \rightarrow +\infty} F(a)$ .

## VZOR ZADÁNÍ ÚSTNÍ ČÁSTI ZKOUŠKY

**Otázka 1.** *Napište definici pojmu:* Stejněměrně konvergentní řada funkcí

**Otázka 2.** *Napište znění věty:* Lagrangeova věta o multiplikátoru

**Otázka 3.** *Napište znění věty:* Fubiniova věta

**Otázka 4.** *Poreferujte na téma:* Lebesgueův-Stieltjesův integrál