I. OPAKOVÁNÍ - OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek.
a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x < 0,\ y \geq 0\}$ b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}\}$ c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}, x \geq 0\}$
d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y \leq 0\}$ e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + e^y > 17\}$ f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ |x-y| = x-y\}$

2. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují
a) $\operatorname{arctg}(x^2y^3 + 2^x)$ b) $(x+y)^x$ c) $\frac{1}{2}\log\frac{x+y}{x-y}$

3. Určete a nakreslete definiční obor funkce f a vyšetřete její parciální derivace
a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{y}}$
4. Uvažujme funkci
$$f(x,y) = y^{|y-\sqrt{x^2+1}|}.$$
Vyšetřete její parciální derivace podle proměnné x.
5. Určete a nakreslete definiční obor funkce
$$f(x,y) = \sqrt{\frac{|x| - \sqrt[3]{y}}{2 + \sqrt[3]{y}}}$$
a vyšetřete její parciální derivace podle proměnné x.

Další příklady k procvičení:

- **lehčí:** [1, příklady I.3.e-g; II.1.a-c] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru)
- **normální:** [1, příklady I.3.h-k; II.1.d,h,i,j] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru)
- **složitější:** [1, příklady I.3.l; II.1.e-g,k; II.2.a-f] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru, u příkladů II.2 bez určování tečné nadroviny)

[1] materiály ke cvičení z Matematiky 2 (2015/16), umístěny na webu zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/FSV/m2-2015-16.pdf`

I. OPAKOVÁNÍ - OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, PARCIÁLNÍ DERIVACE - VÝSLEDKY

1. a) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x < 0,\ y > 0\}$ b) Množina není uzavřená, je otevřená c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek $\{[x,y] :\ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}, x > 0\}$
d) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y < 0\}$ e) Množina není uzavřená, je otevřená f) Uzavřená, vnitřek $\{[x,y] :\ x > y\}$
2. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3 + \log 2 \cdot 2^x}{(x^2y^3+2^x)^2+1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^2y^2}{(x^2y^3+2^x)^2+1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (x+y)^x\Big(\log(x+y) + \frac{x}{x+y}\Big)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(x+y)^{x-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňující $x+y > 0$.
c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y}{x^2-y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2-y^2}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ splňující $x \neq y$ a $\frac{x+y}{x-y} > 0$
3. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq -x^6\}$, pro $(x,y) \in D_f$ splňující $y \neq x^6$ máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{y}}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{6\sqrt{x^2+\sqrt[3]{y}}\,\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistuje a v ostatních bodech definičního oboru nemá smysl zbývající parciální derivace počítat
4. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > 0\}$, pro $(x,y) \in D_f$ splňující $y \neq \sqrt{x^2+1}$ máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^{|y-\sqrt{x^2+1}|} \cdot \frac{x \log y}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \operatorname{sgn}(\sqrt{x^2+1} - y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(a, \sqrt{a^2+1})$ neexistuje pro $a \neq 0$
5. $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y > -8,\ y \leq |x|^3\}$, pro $(x,y) \in D_f$ splňující $x \neq 0$ máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}(x)\sqrt{2+\sqrt[3]{y}}}{2(2+\sqrt[3]{y})\sqrt{|x|-\sqrt[3]{y}}}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ neexistuje pro $y \in (-8, 0]$, v ostatních bodech definičního oboru nemá smysl parciální derivace podle x počítat

II. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$.

a) $\cos(x + y^2) + \sin(x^2 + y) = 1,\ M = [-1, -1]$ b) $4 \operatorname{arctg}(x - y^2) + \log(3y - x) = \pi,\ M = [5, 2]$
c) $x^y + y^x = 3,\ M = [1, 2]$ d) $\arccos(\log x + \log y) = 3 \arcsin \frac{x+y}{4},\ M = [1, 1]$
e) $e^{(\frac{x}{y} - 1)} + e^{(x-y^2)} = 2,\ M = [1, 1]$ f) $\operatorname{arctg}(x + \sin y) + \operatorname{arctg}(x + \cos y) = \frac{\pi}{4},\ M = [1, \pi]$

Další příklady k procvičení:

- příklady z oddílu III.2 ke cvičení z Matematiky 2
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/FSV/m2-2015-16.pdf`
- příklady 1-10 z materiálů doc. Zeleného
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Implicitni_funkce.pdf`
- příklady z webu kolegyně Kuncové
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie27.php`
- zkouškové příklady z Matematiky II z webu prof. Kalendy
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

II. IMPLICITNÍ FUNKCE - VÝSLEDKY

1. a) $f'(-1) = 2,\ f''(-1) = 7$ b) $f'(5) = \frac{1}{5},\ f''(5) = -\frac{2}{25}$ c) $f'(1) = -2 - 2\log 2,\ f''(1) = 6 + 12\log 2 + 2\log^2 2$
d) $f'(1) = -1,\ f''(1) = \frac{4}{2+\sqrt{3}}$ e) $f'(1) = \frac{2}{3},\ f''(1) = -\frac{10}{27}$ f) $f'(1) = 3,\ f''(1) = 14$

III. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1. U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.
a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ b) $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$

2. Určete, které z následujících množin jsou kompaktní a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + 3y^2 \leq 1\}$ b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon \sin(xy) \leq \frac{1}{2}\}$ c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon y = x+4, 0 \leq x \leq 7\}$ d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2+y^2 \neq 0, \log(x^2+y^2) \leq 1\}$

3. Zjistěte sup **a** inf **funkce f na množině M a vyšetřete, zda těchto hodnot funce f na M nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).**

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; $M = \{[x,y]; |x| + |y| \leq 1\}$ b) $f(x,y) = x - y + \sin x \cos y$, $M = [0, \frac{\pi}{2}]^2$
c) $f(x,y) = \frac{2xy+1}{3x-2y-1}$, $M = \{[x,y]\colon -1 \leq x \leq y \leq -x\}$

Další příklady k procvičení:

- příklady z webu kolegyně Kuncové
  `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie30.php`
- příklady ze sbírky od Iljy Černého
  `https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf`

VÝSLEDKY

1. a) $[1,1]$ je bodem ostrého lokálního minima, ve stacionárním bodě $[0,0]$ není lokální extrém   b) $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální minima, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$ jsou ostrá lokální maxima, ve stacionárních bodech $[0,\pm1]$, $[\pm1,0]$ není lokální extrém
2. a) ano b) ne c) ano d) ne
3. a) max 1 v bodech $[\pm1,0]$, $[0,\pm1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ b) max v bodě $[\frac{\pi}{2},0]$, min v bodě $[0,\frac{\pi}{2}]$ c) max v bodě $[-1,1]$, min v bodě $[-1,-1]$

III. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH, DRUHÁ ČÁST

1. Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M (s Lagrangeovými multiplikátory).

a) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - y$, $M = \{[x,y]\colon x^2 + y^2 = 1\}$
b) $f(x,y) = x - 2y$, $M = \{[x,y]\colon 13x^2 - 10xy + 13y^2 = 72\}$ (omezenost M není zřejmá, je třeba ji dokázat)

2. Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M (jakoukoliv metodou).

a) $f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2$, $M = \{[x,y]\colon x^2 + y^2 \le 1\}$ b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + 2y^2 - x$, $M = \{[x,y]\colon x^2 + y^2 \le 1\}$
c) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$, $M = \{[x,y]\colon -\frac{1}{2}(x+1) \le y \le \frac{1}{2}(x+1) \le 1\}$

Další příklady k procvičení:

- příklady z webu kolegyně Kuncové
`https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie27.php`
- příklady ze sbírky od Iljy Černého (všechny příklady, kde funkce jsou definované na podmnožinách $\mathbb{R}^2$)
`https://matematika.cuni.cz/dl/ikalkulus/KAP17.pdf`

VÝSLEDKY

1. a) $\max_M f = f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $\min_M f = f(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 - \frac{3\sqrt{3}}{4}$ b) $\max_M f = f(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{7}{\sqrt{10}}) = \frac{3}{2}\sqrt{10}$, $\min_M f = f(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{7}{\sqrt{10}}) = -\frac{3}{2}\sqrt{10}$
2. a) $\max_M f = f(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}) = 2$, $\min_M f = f(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) = f(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = -2$ b) $\max_M f = f(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = 2 + \frac{3}{4}\sqrt{3}$, $\min_M f = f(\frac{4}{15}, \frac{1}{15}) = -\frac{2}{15}$ c) $\max_M f = f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{26}{9}$, $\min_M f = f(1,-1) = -6$

IV. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ na množinách $[0,1]$ a $[1,\infty)$, kde a) $f_n(x) = \frac{2nx}{n^2+x^2}$ b) $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$ c) $f_n(x) = \frac{n^2-x^2}{n^2+x^2}$

2. Dokažte, že funkce f daná předpisem $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \exp(\frac{x}{n})$ je spojitá v bodě 0 a spočtěte $f'(0)$.

3. Uvažujme funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x-3)\right)^n$. Určete pro která x je $f(x) \in \mathbb{R}$ a dokažte, že f je spojitá funkce v bodě 3.

4. Dokažte, že funkce $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \log\left(3 + \cos(\frac{x-2}{n})\right)$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

5. Uvažujme funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos(\frac{2x-1}{3}\pi)\right)^n$. Určete pro která x je $f(x) \in \mathbb{R}$ a dokažte, že f je spojitá funkce na intervalu $(\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$, má na tomto intervalu vlastní derivaci a najděte maximum funkce f na intervalu $[1, \frac{5}{4}]$.

6. Uvažujme funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \log(3 + \frac{2x-2}{n^3})$. Ukažte, že tato funkce má vlastní derivaci na intervalu $(1,\infty)$ a že $\sup_{x>1} |f'(x)| < \infty$.

7. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x + \frac{1}{n^2}| - |x - \frac{1}{n^2}|}{|x + \frac{1}{n^2}| + |x - \frac{1}{n^2}|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Rozhodněte, zda řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$
(Hint: rozepište si předpis funkce bez absolutních hodnot pro $x < -1/n^2$, $x \in [-1/n^2, 1/n^2]$ a pro $x > 1/n^2$).
Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá v bodě 3. Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je klesající na intervalu $(2,\infty)$.

Další příklady k procvičení:

- příklady 13.05-13.10 a 13.61 - 13.70 ze sbírky Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`

IV. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ - VÝSLEDKY

1. a) posloupnost bodově konverguje k funkci $f(x) = 0$ pro $x \in [0,\infty)$, posloupnost je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$ ale není stejnoměrně konvergentní na $[1,\infty)$ b) posloupnost bodově konverguje k funkci $f(x) = 1$ pro $x \in (0,\infty)$ a $f(0) = 0$, posloupnost je stejnoměrně konvergentní na $[1,\infty)$ ale není stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$ c) posloupnost bodově konverguje k funkci $f(x) = 1$ pro $x \in [0,\infty)$, posloupnost je stejnoměrně konvergentní na $[0,1]$ ale není stejnoměrně konvergentní na $[1,\infty)$
2. $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ **3.** definiční obor je interval $(2,4)$ **5.** definiční obor je $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\frac{1}{2} + \frac{3k}{2}, \frac{1}{2} + \frac{3(k+1)}{2})$, maximum je $f(1) = 1$ **7.** ano, řada stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$

V. MOCNINNÉ ŘADY

1. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

2. Sečtěte řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+10}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

Další příklady k procvičení:

- příklady ke cvičení z Matematické analýzy 2 (2023/24)
  `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/MA4_cviceni_2324.pdf`
  (Cvičení 6.3, Cvičení 7.3, Cvičení 9.1 a Cvičení 9.2)
- příklady z webu kolegyně Kuncové
  `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie27.php`

V. MOCNINNÉ ŘADY - VÝSLEDKY

1. a) $\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$, $x \in (-1,1)$ b) $\operatorname{arctg} x - x$, $x \in [-1,1]$

2. a) 8 b) $\frac{1}{5}(1-\log 2)$ c) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

TEORIE MÍRY

Doporučený zdroj informací a příkladů (i řešených) k teorii míry je především

[1] Sbírka příkladů (i řešených) z teorie míry: Lukeš - Příklady k teorii Lebesgueova integrálu.
Online zde: `http://matematika.cuni.cz/lukes-pli.html`

Další zdroje příkladů (často obsahují výběr příkladů ze sbírky výše):

[2] Materiály ke cvičením z teorie míry a integrálu (2013/14) na MFF.
K nalezení zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`

[3] Materiály ke cvičením z Kalkulu 2 od Kristýny Kuncové.
K nalezení zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie27.php`
[4] Materiály ke cvičením z Teorie míry od Kristýny Kuncové.
K nalezení zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie26.php`

Níže specifikuji vždy nějaký výběr příkladů ze zdrojů výše, který považuji za vhodný pro další domácí počítání.

V. FUBINIOVA VĚTA

1. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M, která je omezená křivkami: $2x-y=0, \quad 2x-y-7=0, \quad x-4y+7=0, \quad x-4y+14=0$

2. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: a) M je omezená plochami $z=e^{-x^2}$, $z=0$ a rovinami $y=0$, $y=x$, $x=1$
b) M je omezená plochami $z=6x^2-2xy$, $y=3x-x^2$ a $y=x$

3. Spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M

a) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x\le 5,\ y\le 3,\ xy\ge 1\}$ b) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x>2,\ 0<y<1/x^2\}$
c) M je omezená křivkami: $x=\frac{y^2+b^2}{2b}, \quad x=\frac{y^2+a^2}{2a} \quad (0<b<a)$

4. Spočtěte $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$

a) $M=[0,1]\times[0,1]$; $\quad f(x,y)=\frac{x^2}{1+y^2}$
b) M je ohraničená křivkami $y=0$, $y=1-x$, $y=1+x$; $\quad f(x,y)=x^2+y^2$
c) M je ohraničená křivkami $y=x^2$, $y^2=x$; $\quad f(x,y)=x^2+y$
d) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le R^2\}$ $(R>0)$; $\quad f(x,y)=y^2\sqrt{R^2-x^2}$
e) M je ohraničená křivkami $y=0$, $x=1$, $y=x$; $\quad f(x,y)=\sqrt{4x^2-y^2}$ (těžší)

Další příklady k procvičení: [1, úlohy 5.26, 5.28-5.30, 5.32-5.38, 5.42, 5.43]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady 2., 3., 6., 7., 8., 9., 10. z odkazu "9. Fubinka + 23D integral"]

V. FUBINIOVA VĚTA - VÝSLEDKY

1. 7 **2.** a) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$ b) $\frac{16}{3}$
3. a) $12-\log 5$ b) $1/2$ c) $2/3(a-b)\sqrt{ab}$

4. a) $\pi/12$ b) $1/3$ c) $33/140$ d) $R^5 32/45$ e) $1/3(\pi/3+\sqrt{3}/2)$

VI. VĚTA O SUBSTITUCI

1. Spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné):
a) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 \le R^2, \ (x-1)^2 + y^2 \le 2Ry, \ x \ge 1\}$
b) $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \le x^2 + y^2\}$

2. Spočtěte $\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3$ (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné):
a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le z\ \};$ $\quad f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\quad$ (Hint: sférické souřadnice)
b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\};$ $\quad f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ $\quad$ (Hint: zobecněné sférické souřadnice)
c) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 \le 3z, \ x^2+y^2+z^2 \le 4\ \};$ $\quad f(x,y,z) = z$ $\quad$ (Hint: válcové souřadnice)

3. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné):
a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ c(x^2+y^2) + a^2 z \le a^2 c, \ z \ge 0\}$

4. Ze zkouškovćh písemek:

a) Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \sqrt{\frac{x^2}{9} + (y+1)^2} \le 1, \ 0 < \frac{3y+3}{x} < 1, x > 0\}$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x,y) = (x-2)\cdot\cos\left(2\sqrt{\frac{x^2}{9} + (y+1)^2}\right)$, $(x,y) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$ (hint: použijte posunuté zobecněné polární souřadnice tak, aby bylo $r = \sqrt{\frac{x^2}{9} + (y+1)^2}$).

b) Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \left((x-2)^2 + \frac{y^2}{9} + z^2\right)^4 < (x-2)^2 + \frac{y^2}{9} - z^2, z > 0\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x,y,z) = \left((x-2)^2 + \frac{y^2}{9} - z^2\right)^{-3/8}$, $(x,y,z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^z$ (hint: použijte posunuté zobecněné sférické souřadnice tak, aby bylo $r = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{y^2}{9} + z^2}$).

VI. VĚTA O SUBSTITUCI - VÝSLEDKY

1. a) $R^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$ $\quad$ b) $\frac{\pi ab}{2}(a^2+b^2)$
2 a) $\frac{\pi}{10}$ $\quad$ b) $\frac{4}{5}abc\pi$ $\quad$ c) $\frac{13}{4}\pi$
3 a) $\pi c\frac{a^2}{2}$
4. a) $\frac{9\sqrt{2}}{8}(\sin 2 + 2\cos 2) + \frac{3\pi}{8}(1 - 2\sin 2 - \cos 2)$ $\quad$ b) $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$

Další příklady k procvičení: [3, příklady z odkazů “8. 2D integrál” a “9. 3D integrál”]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady z odkazů “10. polární souřadnice”, “11. Sférické a cylindrické souřadnice” a “12. Sférické a cylindrické souřadnice 2”]

VII. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Určete, pro která $p \in \mathbb{R}$ Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní:

a) $\int_0^1 \frac{\log(1-p^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p\,\mathrm{d}x$

2. Spočtěte následující limity (pečlivě odůvodněte prohození integrálu a limity):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-nx}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{n\sin x}{1+n^2\cdot\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{n\sqrt{x}}{\exp(n^2x^2)}\,\mathrm{d}x$

3. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.

a) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ $(p,q>0)$ d) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \log x\log(1-x)\,\mathrm{d}x$

f) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x$

VII. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ - VÝSLEDKY

1. a) konverguje pokud $p \in [-1,1]$, jinak neexistuje b) existuje vždy, konverguje pokud $p \in (-1,1)$

2. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0

3. a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$

c) nápověda: $\frac{x^{p-1}}{1+x^q} = x^{p-1}\sum_{n=0}^\infty (-x^q)^n$, výsledek: $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}$

d) nápověda: použijte Taylorův rozvoj funkce cosinus, pak $e^{-x}\cos\sqrt{x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-x}\frac{x^n}{(2n)!}$, výsledek: $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$

e) nápověda: použijeme rozvoj Taylorův logaritmu, pak $\log x\log(1-x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n}\log x$, výsledek: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)^2} = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 - \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

f) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{8(n+1)} = \frac{\log 2}{8}$

Další příklady k procvičení: [3] a [4], příklady na "Řadu a integrál" a "Limitu a integrál"

VIII. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

1. Určete definiční obor funkce $F(a) = \int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$ (= množinu všech $a \in \mathbb{R}$, že $F(a) \in \mathbb{R}$) a dokažte, že tato funkce je spojitá na svém definičním oboru.

2. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_1^\infty \frac{\cos(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^7}}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Dokažte, že funkce F je spojitá na svém definičním oboru.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Spočtěte $\lim_{a\to+\infty} F(a)$.

3. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty e^{-8x} \frac{1 - \cos ax}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$ pomocí integrálu a příslušný integrál spočtěte. Dostanete tak hodnotu $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte primitivní funkci k $F'(a)$ a určete hodnotu integrálu $F(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.

6. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{\exp(-a(x+1))}{x+1}(2x+1)\,\mathrm{d}x, \qquad a \in (0,\infty).$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in (0,\infty)$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0,\infty)$ pomocí integrálu a vyšetřete monotonii funkce F na $(0,\infty)$.
- Vyjádřete $F''(a)$ pro $a \in (0,\infty)$ pomocí integrálu, vyšetřete konvexitu/konkávitu funkce F na $(0,\infty)$.

Pozn: Můžete bez důkazu používat, že pro každý polynom P a každé $C > 0$ je integrál $\int_0^\infty P(x)\exp(-Cx)\,\mathrm{d}x$ konvergentní

7. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.

- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0,\infty)$ pomocí integrálu.
- Ukažte, že pro každé $x \in (0,\infty)$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $\frac{\sin ax}{e^x-1} = \sin(ax)e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
- Ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete pro každé $a \in \mathbb{R}$ integrál $F(a)$ jako číselnou řadu.

VIII. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU - VÝSLEDKY

1. definiční obor je $\mathbb{R}$ **2.** $F'(a) = \int_1^\infty \frac{\sin(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^5 a^2}}\,\mathrm{d}x$, $\lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{2}{5}$.
3. $F'(a) = \frac{a}{64+a^2}$, $F(a) = \frac{1}{2}(\log(64+a^2) - \log 64)$.
4. $F'(a) = -\int_0^\infty (2x+1)\exp(-a(x+1))\,\mathrm{d}x$, F klesá na $(0,\infty)$, $F''(a) = \int_0^\infty (2x+1)(x+1)\exp(-a(x+1))\,\mathrm{d}x$, F je konvexní na $(0,\infty)$.
5. $F'(a) = \int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$, $F(0)=0$, $F(a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a}{a^2+(n+1)^2}$ pro $a \neq 0$.

Další příklady k procvičení: nejvíce doporučuji shlédnout příklady ze sbírky [1] (příklady z Kapitoly 6: Integrály závislé na parametru); je možné se podívat i na příklady od Kristýny Kuncové [3] a [4] (příklady na "Integrál závislý na parametru")