MATEMATICKÁ ANALÝZA 1 – PRVNÍ ZÁPOČTOVÁ PÍSEMKA

Na písemku máte 90 minut.

Svůj postup stručně zdůvodněte (stačí napsat název použité věty).

Boduje se i postup, tj. vyplatí se odevzdat i jen částečně vyřešenou úlohu.

1. (10 bodů) Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3-(n+2)^3}{(n^2+1)^2-n^4} \cdot \sqrt[n]{2^n+n^2}.$$

2. (10 bodů) Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n^3+n+2}-\sqrt{n^3-n+\tfrac{1}{n}}\right).$$

3. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(cn)^n}{(2n+2)^{n+1}}$

(a) (5 bodů) pro $c=1$,

(b) (5 bodů) v závislosti na parametru $c>0$.

ŘEŠENÍ

1. Označme $a_n = \dfrac{(n+3)^3-(n+2)^3}{(n^2+1)^2-n^4}$, $b_n = \sqrt[n]{2^n+n^2}$. Potom

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+3n^2\cdot 3+3n\cdot 9+27-n^3-3n^2\cdot 2-3n\cdot 4-8}{n^4+2n^2+1-n^4} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+15n+19}{2n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{15}{n}+\frac{19}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{3+0+0}{2+0},\end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti jsme využili větu o aritmetice limit.
Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ platí (využíváme známý odhad $n^2 \leq 2^n$):

$$2 = \sqrt[n]{2^n} \leq b_n \leq \sqrt[n]{2^n+2^n} = \sqrt[n]{2^n\cdot 2} = 2\cdot \sqrt[n]{2}.$$

Jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$ a $\lim\limits_{n\to\infty} 2\cdot\sqrt[n]{2} = 2\cdot 1 = 2$ (známá limita), máme z věty o dvou strážnících $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$.
Celkově tedy podle věty o aritmetice limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)^3-(n+2)^3}{(n^2+1)^2-n^4}\cdot \sqrt[n]{2^n+n^2} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3.$$

2. Úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n^3+n+2}-\sqrt{n^3-n+\tfrac{1}{n}}\right) = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}}\frac{(n^3+n+2)-(n^3-n+\frac{1}{n})}{\sqrt{n^3+n+2}+\sqrt{n^3-n+\frac{1}{n}}} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{n(2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2})}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \\ &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{2+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \\ &= \sqrt{1+0}\frac{2+0+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}} = 1.\end{aligned}$$

V přechodu na poslední řádek jsme použili větu o aritmetice limit a tvrzení „o limitě a odmocnině“.

3. Označme $a_n = \dfrac{(cn)^n}{(2n+2)^{n+1}}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{cn}{(2n+2)\cdot\sqrt[n]{2n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{(2+\frac{2}{n})\cdot\sqrt[n]{2n+2}} = \frac{c}{2\cdot 1} = \frac{c}{2},$$

kde využíváme aritmetiky limit a faktu $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+2} = 1$:
Platí totiž pro $n \in \mathbb{N}$: $1 \leq \sqrt[n]{2n+2} \leq \sqrt[n]{2n+2n} = \sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n}$, dále (známé limity) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4}\,\sqrt[n]{n} = 1\cdot 1 = 1 = \lim\limits_{n\to\infty} 1$, aplikací věty o dvou strážnících dostaneme $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n+2} = 1$.
Pro $c \in (0,2)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ tudíž konverguje z Cauchyova odmocninového kritéria (speciálně tedy konverguje pro $c = 1$).
Dále pro $c \in (2,\infty)$ je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje z Cauchyova odmocninového kritéria.
Pro $c = 2$ uvažme $b_n = \frac{1}{n}$ a počítejme užitím limity $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n)^n}{(2n+2)^{n+1}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^{n+1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{(2+0)e} = \frac{1}{2e} \in (0,\infty).$$

Jelikož $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje, máme z limitního srovnávacího kritéria, že $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pro $c = 2$ diverguje.