# 1. Zápočtová Písemka Vzorové Řešení

① $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\ln(k^2+1)} x^k$

Jedná se o řadu mocninnou, dokažme, že poloměr konvergence je 1. Pomocí podílového kriteria

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x| \ln(k^2+1)}{\ln(k^2+2k+2)} = |x| \lim_{k\to\infty} \frac{2\ln k + \ln(1+\frac{1}{k^2})}{2\ln k + \ln(1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2})}$$

$$= |x|$$

stačí $|x|<1$. Proto řada konverguje absolutně pro $|x|<1$ a diverguje pro $|x|>1$.

Pro $x=1$ použijeme například Leibnitzovo kriterium

$\sum \frac{(-1)^k}{\ln(k^2+1)}$ stačí dokázat, že $\frac{1}{\ln(k^2+1)} \searrow 0$

což stačí dokázat že $\ln(k^2+1) \nearrow \infty$. Monotonnie platí protože $\ln$ je rostoucí a $k^2+1$ je rostoucí. limita $k^2+1 \longrightarrow \infty$ je zřejmé a $\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$ je známé. Což znamená, že řada konverguje (neabsolutně) pro $x=-1$ máme

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k^2+1)}.$$

Pomocí srovnavacího kritéria

$$\frac{1}{\ln(k^2+1)} \approx \frac{1}{\ln k} \qquad \left( \frac{\ln k}{\ln k^2+1} = \frac{\ln k}{2\ln k + \ln(1+\frac{1}{k^2})} \longrightarrow \frac{1}{2}. \right)$$

Lze ověřit pomocí l'Hop.

$$\frac{\ln k}{k^\alpha} \to 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{totiž} \quad \ln k \ll k^\alpha$$

neboli $\forall k > k_0$ platí $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$, což

implikuje, že $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k} = \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(k^2+1)} = \infty$,

což také potvrzuje, že konvergence v $x=1$ není absolutní.

<u>Bonus</u> $(-1)^k x^k = e^{(i\theta + i\pi)k}$ toto má omezené částečné součty jakmile $\theta + \pi \neq 2m\pi$, neboli $x \neq -1$.

Proto řada konverguje (neabsolutně) pro $|x|=1$, $x \neq -1$

(2) $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ zřejmě $y \neq 0$.

Pro $y \neq 0$ je pravá strana lokálně Lipschitzovsky spojité v $y$, tudíž je řešení jednoznačné. Je

$y'(x)\, y(x) = -x$ integrací máme

$\frac{y^2(x)}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$ nutně je $C - \frac{x^2}{2} > 0$

změnou hodnoty $C$ je

$$y(x) = \begin{cases} \sqrt{C^2 - x^2} \\ -\sqrt{C^2 - x^2} \end{cases}$$ pro $|x| < C > 0$.

nárčt řešení: