Lineární systémy s konstantními koeficienty

Řešíme
$$y' = Ay \quad \text{, kde } y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \text{ a } A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Případ 1 Matice A má n vlastních vektorů

Př
$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} y \iff \begin{aligned} x' &= 2x + 2w \\ w' &= -x + 5w \end{aligned}$$
kde $y = \begin{pmatrix} x \\ w \end{pmatrix}$

Najdeme vlastní čísla A:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) + 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 12$$
$$= (\lambda - 3)(\lambda - 4) \qquad \lambda = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases}$$

Najdeme odpovídající vlastní vektory:

$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ a toto řeší například $(2, 1)$.

$A - 4I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ a toto řeší například $(1, 1)$

Řešení jsou ve tvaru $e^{\lambda t} v$, kde λ je vlastní číslo a v odpovídající vlastní vektor (a jejich lin. komb.)

Máme fundamentální systém

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix} \right\} \qquad y(t) = \begin{pmatrix} 2c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} \\ c_1 e^{3t} + c_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

Případ 2: Opakované vlastní číslo, které má „méně" vlastních vektorů:

Řešíme

$$y'(t) = Ay(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} y(t)$$

Najdeme vlastní čísla:

$$\det(A - \lambda I) = 1 - \lambda = 0 \qquad \lambda = 1.$$

Najdeme řešení $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ nebo jeho násobek}$$

jiná řešení nejsou protože první a třetí rovnice říká, že $\vec{v}_2 = 0$ a druhá rovnice že $\vec{v}_1 = \vec{v}_3$.

Nyní najdeme vlastní vektory zobecněné. Řešíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ řeší } \vec{w} = (0,1,0)$$

(řešení je jednoznačný až na $+c\vec{v}$)

Opět

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ řeší } \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jak pomocí toho najít F.S.

a) Nejdřív standartně $e^t\vec{v} = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$

b)
$$A\vec{w} = (A-I)\vec{w} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$(\vec{w}e^t)' = \underline{\vec{w}e^t} \qquad A\vec{w}e^t = \vec{v}e^t + \underline{\vec{w}e^t}$$

chybí nám $\vec{v}e^t$ na levé straně, přitom víme, že

$$A\vec{v} = \vec{v} \qquad (t\vec{v}e^t)' = \vec{v}e^t + te^t\vec{v}.$$

Tudíž
$$(t\vec{v}e^t + \vec{w}e^t)' = t\vec{v}e^t + \vec{v}e^t + \vec{w}e^t$$

a
$$A(t\vec{v}e^t + \vec{w}e^t) = t\vec{v}e^t + \vec{v}e^t + \vec{w}e^t$$

c) Podobně je řešením

$$\left(\tfrac{1}{2}\vec{v}t^2 + t\vec{w} + \vec{u}\right)e^t.$$

$$F.S. = \left\{ \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} te^t \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2e^t \\ te^t \\ \frac{1}{2}t^2e^t + e^t \end{pmatrix} \right\}.$$

Případ 3: Komplexní Vlastní Čísla

Řešíme

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} y(t)$$

Najdeme vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -10 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2)+20$$
$$= \lambda^2 + 16 = 0$$

$\lambda = \pm 4i$

Vlastní vektor na $4i$ je $\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{v}$

na $-4i$ je $\begin{pmatrix} 1-2i \\ 1 \end{pmatrix} =: \vec{u}$

Rozdělme $e^{\lambda t}\vec{v}$ na reálnou a imag. části

$$\begin{pmatrix} 1+2i \\ 1 \end{pmatrix}(\cos 4t + i\sin 4t) = \begin{pmatrix} \cos 4t - 2\sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2\cos 4t + \sin 4t \\ \sin 4t \end{pmatrix}$$

F.S. se skládá z těchto dvou funkcí

$$FS = \left\{ \begin{pmatrix} \cos 4t - 2\sin 4t \\ \cos 4t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\cos 4t + \sin 4t \\ \sin 4t \end{pmatrix} \right\}$$

Bernoulliho rovnice

Mějme rovnici typu

$$y' + a(x)\,y(x) = b(x)\,y^p(x)$$

v závislosti na p možná bude třeba předpokládat že $y>0$ (např. $p=\frac{1}{2}$). Předpokládáme, že $p \neq 1$.

Předpokládejme, že $y \neq 0$

$$\circledast \quad \frac{y'(x)}{y^p(x)} + a(x)\,y^{1-p}(x) = b(x)$$

Zadefinujme $z(x) := y^{1-p}(x)$. Pak $z' = \dfrac{(1-p)\,y'(x)}{y^p(x)}$

$$z'(x) + a(x)(1-p)\,z(x) = b(x)(1-p)$$

což je lineární rovnice, která se dá řešit pomocí integrálního faktoru.

<u>Př</u> $y' + xy = \sqrt{y} \iff \dfrac{y'}{\sqrt{y}} + x\sqrt{y} = 1$ pro $y>0$

definujme $z(x) := \sqrt{y}$ $\quad z'(x) = \frac{1}{2}\dfrac{y'}{\sqrt{y}}$. Máme

$$z'(x) + \frac{x}{2}\,z(x) = 1$$

$$z(x) = \frac{\int e^{\frac{x^2}{4}}}{e^{\frac{x^2}{4}}}$$ (což neumím spočítat) $y = z^2$.