Lineární Rovnice Vyššího Řádu s konstantními koeficienty

Řešíme $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x)$.

Homogenní Rovnice Polož $b = 0$

Řešíme pomocí řešení algebraické rovnice „přídavné"

$$y^{(n)} \longrightarrow \lambda^n$$

Př $y''' + 2y'' + y = 0 \longrightarrow \lambda^3 + 2\lambda^2 + 1 = 0$.

Najdeme řešení přídavné rovnice a z toho tvoříme Fundamentální systém řešení

$$y'' + 5y' + 6y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda + 2)$$

$\lambda = -2, \lambda = -3$

$FS = \{e^{-2x}, e^{-3x}\}$ Pak každé řešení Homogenní rovnice je tvaru

$$y_h(x) = ae^{-2x} + be^{-3x}$$

Případ opakovaný kořen

$$y'' + 2y' + y = 0 \to \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$= (\lambda+1)^2$$

$\lambda = -1$ je 2násobný kořen.

$F.S. = \{e^{-x}, \underline{\underline{xe^{-x}}}\}$ přidáme mocninu x.

<u>Proof</u> $(xe^{-x})'' = (e^{-x} - xe^{-x})' = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$

$$\underbrace{-2e^{-x} + xe^{-x}}_{y''} + \underbrace{2e^{-x} - 2xe^{-x}}_{2y'} + \underbrace{xe^{-x}}_{y} = 0 \checkmark$$

<u>Případ Komplexní kořen</u> Lze to vnímat celé jako funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$ s tím že můžeme (smíme) násobit komplexními koeficienty. To nás umožní najít reálná řešení.

$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)$$

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha+i\beta)x}}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$\frac{e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha+i\beta)x}}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Př

$$y'' + 4y' + 13y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm 3i \qquad (\lambda+2)^2 + 9 = 0$$

$$FS = \{e^{-2x}\cos 3x, e^{-2x}\sin 3x\}$$

$$y_h = a e^{-2x}\cos 3x + b e^{-2x}\sin 3x$$

Př $\underbrace{(e^{-2x}\cos 3x)''}_{y_1''} = (-2e^{-2x}\cos 3x - 3e^{-2x}\sin 3x)'$

$$= 4e^{-2x}\cos 3x + 12e^{-2x}\sin 3x - 9e^{-2x}\cos 3x$$

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}\left(\cos 3x\,(4 - 9 - 8 + 13) + \sin 3x\,(12 - 12)\right) = 0$$

$$\underbrace{(e^{-2x}\sin 3x)''}_{y_2''} = (-2e^{-2x}\sin 3x + 3e^{-2x}\cos 3x)'$$

$$= (4e^{-2x}\sin 3x - 9e^{-2x}\sin 3x - 12e^{-2x}\cos 3x)$$

$$-5e^{-2x}\sin 3x - 12e^{-2x}\cos 3x$$

$$y'' + 4y' + 13y = e^{-2x}\cos 3x\,(-12 + 12) + e^{-2x}\sin 3x\,(-5 - 8 + 13) = 0.$$

$\underline{\text{Př}}$ $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$

$FS = \{\cos 2x,\ \sin 2x\}$

$y_p = u_1(x)\cos 2x + u_2(x)\sin(2x)$

Máme dvě neznámé u_1, u_2 potřebujeme 2 podmínky

a) $y_p'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$ (kvůli rovnici)

b) $u_1'(x)\cos(2x) + u_2'(x)\sin(2x) = 0$

(to druhé jsme vymysleli sami aby nám to lépe šlo vypočítat)

0 dle b)

Počítejme $y_p' = \boxed{u_1'\cos(2x)} - 2u_1\sin(2x) + \boxed{u_2'\sin(2x)} + u_2(x)2\cos 2x$

$= 2u_2(x)\cos(2x) - 2u_1(x)\sin(2x)$

$y_p''(x) = -4u_2(x)\sin(2x) + 2u_2'\cos 2x - 2u_1'(x)\sin(2x)$
$- 4u_1(x)\cos(2x)$

Dosadíme do a)

4y

$\underbrace{-4u_2(x)\cancel{\cos}\sin 2x + 4u_2(x)\sin(2x) - 4u_1\cos(2x) + 4u_1\cos(2x)}_{0}$

$+ 2u_2'\cos(2x) - 2u_1'\sin 2x = 2\,\mathrm{tg}\,x$

Máme tedy systém

a) $u_2' \cos(2x) - u_1' \sin(2x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

b) $u_2'(\sin 2x) + u_1' \cos(2x) = 0$

a) Násobíme $\sin 2x = \sin x \cos x$, b) násobíme $\cos(2x)$ a odečteme.

$$u_2'(\cos(2x)\sin(2x) - \cos(2x)\sin(2x)) - u_1'(\sin^2(2x) + \cos^2(2x))$$

$= \sin^2 x$ neboli

$$u_1'(x) = \sin^2 x \qquad u_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}$$

na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$.

z dosazení do b)

$$u_2' \sin(2x) + \sin^2(x)\cos(2x) = 0$$

$$u_2' = \frac{(2\cos^2 x - 1)\sin^2 x}{\cancel{\sin(x)}\cos(x)} = 2\cos x \sin x - \operatorname{tg} x$$

$$u_2(x) = -\frac{\cos 2x}{2} + \ln|\cos x| \qquad x \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}) + k\pi.$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x\cos 2x - \frac{\cos(2x)\sin(2x)}{4} - \frac{\cos(2x)\sin(2x)}{2} + \ln|\cos(x)| \sin 2x$$

$x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + k\pi.$