Rovnice se separovanými promennými.

Máme $y' = F(x) \cdot G(y)$

Zavislost na x a na y lze napsat jako součin 2 funkci, jedna je funkce x druhá je funkce y.

V tu chvíli dáme $G(y)$ k y' a necháme $F(x)$ na druhé straně. Pozor musíme zajistit aby $G(y) \neq 0$. Pak je

$$\frac{y'}{G(y)} = F(x)$$

zintegrujeme

$$\underbrace{\int \frac{1}{G(y)}\,dy}_{=\,\tilde{G}(y)} \overset{\text{TS}}{=} \int \frac{y'(x)}{G(y(x))}\,dx = \int F(x)\,dx =: \tilde{F}(x) + c$$

Pro G spoj $G \neq 0$ je G buď > 0 nebo < 0

$\Rightarrow$ $\tilde{G}$ je monotonní a $\exists\, \tilde{G}^{-1}$

Máme $y(x) = \tilde{G}^{-1}\left(\tilde{F}(x) + c\right)$.

Řešme $y' = |y|$

Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými. Chceme dělit pravou stranou ať je veškeré y vlevo. Tím padem musíme předpokládat, že $y \neq 0$. Pokud $y = 0$ pak i $y' = 0$ a tudíž rovnici řeší konstanta. Jelikož funkce $t \to |t|$ je lipschitzovská (má derivaci omezenou 1 a je spojitá až na jeden bod) je konstantní $y = 0$ jediné řešení, které nabývá hodnotu 0. Je $y = 0$ $x \in \mathbb{R}$ maximálním řešením.

Dále je $y \neq 0$ pak rozdělme na dva případy, nejdřív

$y > 0$ pak $\frac{y'}{y} = 1$

Zintegrujeme $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int 1 \, dx = x + C$

Z věty víme, že řešení existuje je to funkce $y(x)$ a použijeme tuto (zatím neznámou) funkci v substituci $y'(x)dx = dy$. Tudíž

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx \rightsquigarrow \int \frac{1}{y} dy = \ln(y) \rightsquigarrow \ln y(x)$$

Zde předpokládáme, že $y > 0$.

Máme tedy vztah
$$\ln(y) = x + C$$
ln má obor hodnot $\mathbb{R}$ tudíž pro všechny hodnoty $x+C$ existuje $y \in (0, \infty)$ takové že $\ln y = x + C$, tudíž vztah platí pro všechny $x \in \mathbb{R}$. Je
$$\ln(y) = x + C \Rightarrow y = e^{x+C} = K e^x,$$
kde $K = e^C > 0$. Toto je řešení na $\mathbb{R}$.

Případ $y < 0$ podobně
$$\frac{-y'}{-y} = -1 \Rightarrow \ln(-y) = -x + C$$
$$\Rightarrow y = -Ke^{-x} \quad \text{kde } K = e^C > 0$$
řešení platí na $\mathbb{R}$.

Celkově
$$y(x) = \begin{cases} Ke^x & x \in \mathbb{R} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \\ -Ke^{-x} & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad K > 0$$
jsou maximální řešení. Jelikož ke každému (y_0, x_0) najdeme K: $y_0 = Ke^{(\operatorname{sgn} y_0) x_0}$

máme všechna maximální řešení

$$y' = |y|$$

Náčrt řešení:

$y' = \sqrt[3]{y^2}$ Rovnice je dobře definovaná pro všechna $y \in \mathbb{R}$.

Pokud $y = 0$ je $y' = 0$ a tudíž konstantní $y = 0$ je řešením. Nicméně je derivace funkce $t \longrightarrow t^{\frac{2}{3}}$ neomezená v okolí 0.

Proto se nedá očekávat že je řešení jednoznačný.

Pro $y \neq 0$ je $\dfrac{y'}{\sqrt[3]{y^2}} = 1$

Integrováním je $3\sqrt[3]{y} = x + C$ (zatímco $x + C > 0$ nebo $x + C < 0$)

$$y(x) = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3 \qquad \text{pro } x > -C \text{ nebo } x < -C$$

Tato řešení ~~jsou~~ řešeními ale nikoli maximálními, protože $\lim_{x \to -C} y(x) = 0$, kde rovnice je dobře definovaná a tedíž lze je „prodlužovat"

$$y(x) = \begin{cases} \left(\frac{x+C_1}{3}\right)^3 & x < -C_1 \\ 0 & -C_1 < x < -C_2 \\ \left(\frac{x+C_2}{3}\right)^3 & -C_2 < x \end{cases}.$$

Zřejmě je y spojitá. y řeší rovnici na každém intervalu $x < -C_1$, $x \in (-C_1; C_2)$, $x > -C_2$

Takto definovaná y je řešením, pokud má spojitou derivaci všude (speciálně v $-C_1$, a v $-C_2$)

$$\left.\begin{array}{l} y'(\cancel{x}) = 0 \text{ na } (-C_1, -C_2) \\ y'(x) = 3\left(\frac{x+C_i}{3}\right)^2 \xrightarrow{x \to C_i} 0 \end{array}\right\} \quad y' \text{ je spojitá na } \mathbb{R}.$$

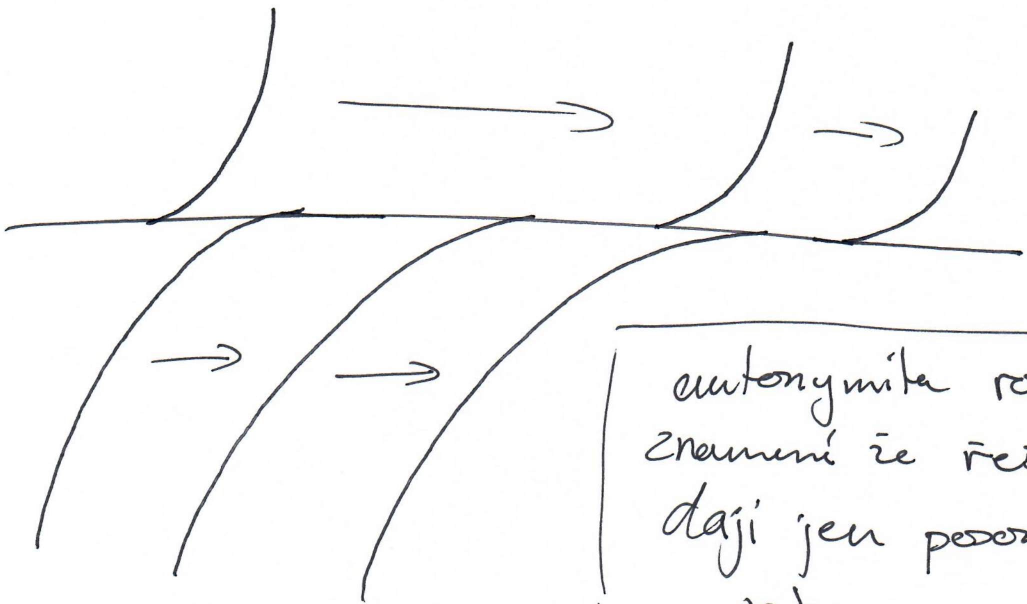
Celkově tedy je naše y maximální řešení.

Pokud položíme $C_1 \in (-\infty, \infty]$, $C_2 \in [-\infty, \infty)$

máme zahrnuté i řešení typu

$$\begin{matrix} 0 \\ \left(\frac{x+C_2}{3}\right)^3 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \left(\frac{x+C_1}{3}\right)^3 \\ 0 \end{matrix}, \quad 0$$

Náčrt řešení



autonymita rovnice znamená že řešení se dají jen posouvat na sebe

Jedná o všechna maximální řešení na $y>0$, $y<0$ protože každé z $\left(\frac{x+c}{3}\right)^3$ má za obor hodnot $(0,\infty)$, resp $(-\infty,0)$ a autonymita rovnice znamená že se řešení pouze „posouvají" se v x. Pak jde jen o to zabrat všechna možnosti jak přejít $y=0$.

Lineární Rovnice - Integrační faktor

Mějme rovnici

$$\circledast \quad y'(x) + a(x)y(x) = b(x).$$

Rovnice $y'(x) + a(x)y(x) = 0$ je homogenní rovnice a má seperovanné proměnné.

Řešení homogenní rovnice ~~je~~

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} = \frac{1}{e^{A(x)}}$$ kde $A(x) = \int a(x)\,dx$.

Předpokládejme že $\circledast$ se dá řešit ve tvaru $y(x) = \left(\frac{C(x)}{e^{A(x)}}\right)$ vložíme do rovnice

$$y' + ay = \frac{C'(x)}{e^{A(x)}} - \frac{a(x)\,C(x)}{e^{A(x)}} + \frac{a(x)\,C(x)}{e^{A(x)}} = \frac{C'(x)}{e^{A(x)}} = b(x)$$

Pak $C(x) = \int b(x) e^{A(x)}\,dx$

a $$y(x) = \frac{\int b(x) e^{A(x)}\,dx}{e^{A(x)}}.$$

C

(2) $x \neq 0$ $\quad y' - \frac{y}{x^2} = \frac{1}{x^3}$

$$a(x) := \frac{-1}{x^2} \qquad \int a(x) = \frac{1}{x} = A(x)$$

$$C(x) = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\right) \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

Pokračujeme per partes $\quad \int \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$C(x) = \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - \int \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - e^{\frac{1}{x}} + \tilde{C}$$

$x > 0,\ x < 0.$

$$y(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x} - 1\right)}{e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\tilde{C}}{e^{\frac{1}{x}}} = \left(\frac{1}{x} - 1\right) + \tilde{C} e^{-\frac{1}{x}}$$

$x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$

Kvůli spojitosti nelze řešení prodloužit přes $x = 0$. Řešení je maximální.