-1) A B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{ak}}{k!}$ $a \in \mathbb{R}$

Použijeme podílové kritérium (limitní)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{ak}}{k^{ak}} \frac{(k+1)^a}{k+1} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^a \cdot (k+1)^{a-1}$$

$\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right)^a \longrightarrow e^a$ díky spojitosti fce $t \to t^a$ v bodě e.

$(k+1)^{a-1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & a<1 \\ 1 & a=1 \\ \infty & a>1 \end{cases}$. Pomocí VOAL

je $\frac{a_{k+1}}{a_k} \longrightarrow \begin{cases} 0 & a<1 \\ e & a=1 \\ \infty & a>1 \end{cases}$. Protože

je $e>1$ řada konverguje právě tehdy, když $a<1$.

(6) (A) (8) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3k-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4k-3)} =: \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Použijeme podílové kritérium

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3k+2}{4k+1} \longrightarrow \frac{3}{4} < 1.$$

Jelikož $\frac{3}{4} < 1$ řada konverguje.

1

(A) (9) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, kde $a_k := \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{p-1+j}{j}\right) \cdot \frac{1}{k^q}$

Začněme odhadem $\prod_{j=1}^{k} \frac{p-1+j}{j}$. K tomu budeme potřebovat odhad logaritmu pomocí Taylora, totiž

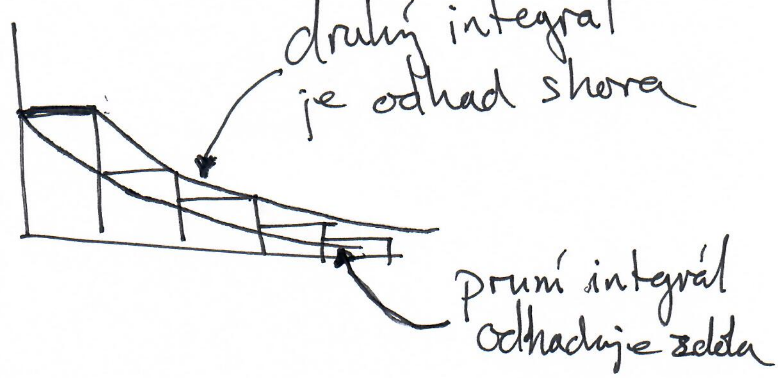
(A) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \leq t$ pro všechny t dostatečně malé. Dále opačný odhad

(B) $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \geq t - \frac{t^2}{2}$ pro malé kladné t.

Navíc si připravíme odhad logaritem

(C) $$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \geq \int_0^{k-1} \frac{1}{x+1}\,dx = \ln k$$
$$\leq 1 + \int_1^k \frac{1}{x}\,dx = 1 + \ln k.$$

Důkaz obrázkem



Počítejme nyní

$$\prod_{j=1}^{k} \frac{p-1+j}{j} = \prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{p-1}{j}\right)$$

$$= e^{\ln\left(\prod_{j=1}^{k}\left(1+\frac{p-1}{j}\right)\right)} = e^{\sum_{j=1}^{k}\ln\left(1+\frac{p-1}{j}\right)}$$

Najdeme k_0 takové že odhady (A) a (B) platí. Je jen konečně mnoho členů (k_0) kde odhady neplatí a jejich součet je maximalně nejaké $C \in \mathbb{R}$.

Pak $\sum_{j=1}^{k}\ln\left(1+\frac{p-1}{j}\right) \leq C + \sum_{j=k_0}^{k}\frac{p-1}{j}$

$$\geq C + \sum_{j=k_0}^{k}\frac{p-1}{j} - \underline{\underline{\frac{1}{2}\sum_{j=k_0}^{k}\frac{(p-1)^2}{j^2}}}$$

Člen $\frac{1}{2}\sum_{j=k_0}\frac{(p-1)^2}{j^2}$ má konečný součet a tudíž máme pomocí (A) a (C)

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{p-1+j}{j}\right) \leq K e^{\sum_{j=k_0}^{k}\frac{p-1}{j}} \leq K e^{(p-1)\ln\frac{k}{k_0}}$$

$$= \frac{K}{k_0^{p-1}}\, k^{p-1}$$

Podobně pomocí (B) a (C)

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{p-1+j}{j}\right) \geq \frac{\tilde{K}}{k_0^{p-1}}\, k^{p-1},$$ neboli

$$\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{p-1+j}{j}\right) \approx k^{p-1}$$

Z tohoto usoudíme, že

$$a_k \approx k^{p-1-q}$$

tedy $\sum a_k$ konverguje právě tehdy

když $p-q-1 < -1$ totiž $p<q$.

4

B 5 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2}}{k^a}$

$$\sqrt{k+2}-\sqrt{k-2} = \frac{4}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k-2}} \leq \frac{C_1}{\sqrt{k}}$$

$$\geq \frac{C_2}{\sqrt{k}}$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje právě tehdy když konverguje $\displaystyle\sum \frac{1}{k^{a+\frac{1}{2}}}$,

tj. právě když $a > \frac{1}{2}$.

(5) (B) (10) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3(1-\cos n^{-1})$. Začneme Taylorem

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$1-\cos\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$n^3(1-\cos(n^{-1})) = n + o(n).$$

Jelikož řada nesplňuje podmínku nutnou nekonverguje.

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Odhady $|\sin t| \leq |t|$

$\ln(1+t) \leq t$ pro malé t.

Proto $\exists n_0 ; \forall n \geq n_0$ je

$$\left|\sin\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$$

a $\frac{1}{n^2}$ tvoří řadu konvergentní.

Konverguje tedy i naše řada dle srov. krit.