

Přehled „častých“ / „standardních“ substitucí

① Předmluva polynom dvou promenných

$p(x, y)$ je funkce vyjádřenou následovně

$$p(x, y) = \sum_{k, m=0}^n \alpha_{k, m} x^k y^m \quad \alpha_{k, m} \in \mathbb{R}.$$

Racionální lomená funkce dvou promenných

$$\text{je } R(x, y) = \frac{p_1(x, y)}{p_2(x, y)}$$

kde p_1, p_2 jsou obě polynomy (obou 2 promenných).

① Když máme integrovat

$$\int R(\sin x, \cos x) dx, \text{ pak Weierstrassova}$$

substituce $z = \tan \frac{x}{2}$ přenechá integrál na

$\int \tilde{R}(z) dz$ kde $\tilde{R}$ je obyčejnou racionální lomenou funkcí.

Vyjadřujeme $\sin(x) = \frac{2z}{1+z^2}$ $\cos(x) = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$$dx = \frac{2}{1+z^2} dz.$$

② Pokud máme najít

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \text{ kde } a, b, c, d \in \mathbb{R} \\ m \in \mathbb{N}.$$

Pak substituce $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ převede integrál na $\int \tilde{R}(t) dt$ kde $\tilde{R}$ je dyckejnou racionální lomenou funkcí.

Vyjadřujeme x podle t umocněním na m a vyřešíme pro x . Podle toho pak najdeme dx podle t a dt .

③ Pokud máme zintegrovat

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \text{ pak Eulerova}$$

substituce to převede na dyckejnou racionální lomenou funkci.

Prípád I $a > 0$

$$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{a} x \quad . \quad \text{Očistíme } \sqrt{a} x \text{ a umocníme}$$

$$(t - \sqrt{a} x)^2 = t^2 - 2\sqrt{a} x t + ax^2 = ax^2 + bx + c \quad \text{neboli}$$

$$t^2 - 2\sqrt{a} x t = bx + c$$

$$t^2 - c = x(2\sqrt{a} + b) \quad \text{neboli}$$

$$x = \frac{t^2 - c}{2\sqrt{a}t + b} \quad \text{a tudiž}$$

$$dx = \frac{2t(2\sqrt{a}t + b) - 2\sqrt{a}(t^2 - c)}{(2\sqrt{a}t + b)^2} dt$$

Prípád II $a < 0, c > 0$

$$tx = \sqrt{a^2x^2 + bx + c} + \sqrt{c}$$

$$(tx - \sqrt{c})^2 = t^2x^2 - 2\sqrt{c}tx + c = ax^2 + bx + c \quad \text{neboli}$$

$$t^2x^2 - 2\sqrt{c}tx = ax^2 + bx \quad \text{tudiž}$$

$$t^2x - 2\sqrt{c}t = ax + b \quad \text{a} \quad x(t^2 - a) = 2\sqrt{c}t + b$$

tudiž

$$x = \frac{2\sqrt{c}t+b}{t^2-a} \quad \text{a} \quad \text{tudiž}$$

$$dx = \frac{2\sqrt{c}(t^2-a) - 2t(2\sqrt{c}t+b)}{(t^2-a)^2} dt$$

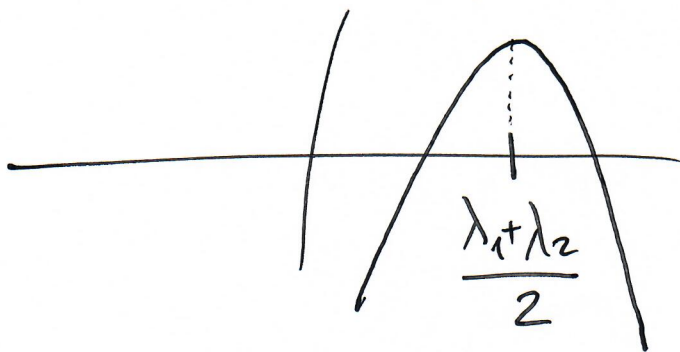
Případ III. Pokud $a, c < 0$ ale

$ax^2+bx+c > 0$ na nějakém intervalu (λ_1, λ_2) ,
pak substitucí

$$y = x - \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right) \quad \text{převědeme}$$

na případ II, kde nové a je jako staré a
nové b je 0 a nové c je kladný.

Případ III



④ Čebyševova Substituce

Máme-li spočítat

$$\int x^p (a + b x^q)^m \quad p, q \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}.$$

Vyjadřujeme p, q jako $p = \frac{\tilde{p}}{L}, q = \frac{\tilde{q}}{L}$

kde L je společný jmenovatel a, $\tilde{p}, \tilde{q} \in \mathbb{Z}$.

Pak substituce $t = x^{\frac{1}{L}}$ přenechá integrál na racionální lomenou funkci.

$$t^L = x \quad L t^{L-1} dt = dx,$$