

Přiběh funkce

Pronést přiběh funkce znamená zjistit

- Maximální definiční obor daného výrazu
- (Jednostranné) limity v bodech kde funkce definovaná není (pokud $P(x, \delta) \subset D_f$ pro nějaké δ)
a v $\pm\infty$
- Je funkce sudá, lichá, periodická nebo jinak symetrická?
- Najít řešení rovnice $f(x)=0$ (pokud to jde)
- Najít největší intervaly na kterém f je spojitá
- Najít f' včetně $D_{f'}$, vyřešit $f'(x)=0$.
- Najít extrémny (lokální a globální) funkce f
a intervaly monotonicity
- Najít f'' , intervaly konvexity/konkavity
- Chování u ∞ ,
- Pronést náčrt grafu funkce f .

Př: Proveďte průběh funkce pro
výraz: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Řešení:

$x \rightarrow x$ je definované $\forall x \in \mathbb{R}$

$x \rightarrow \frac{1}{x}$ je definované $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$t \rightarrow \sin t$ je definované $\forall t \in \mathbb{R}$. Tudiž

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Existuje $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ totiž $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$

a $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ (zde použijeme větu $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot h(x) = 0$
pokud $|g(x)| \leq M$ a $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$)

Funkce $x \rightarrow x$ je lichá, $x \rightarrow \frac{1}{x}$ je lichá, $t \rightarrow \sin t$ je lichá
 $\Rightarrow x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ je lichá $\Rightarrow x \rightarrow x \sin \frac{1}{x}$ je sudá.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{t = \frac{1}{x} \quad t \rightarrow 0^+}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Podobně $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$ (nebo pomocí sudosti)

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$\sin t = 0 \Leftrightarrow t = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi, \quad x = \frac{1}{k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Protože $x \rightarrow x$ a $x \rightarrow \sin \frac{1}{x}$ jsou spojité na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($x \rightarrow \frac{1}{x}$ spoj na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $t \rightarrow \sin t$ je spoj na $\mathbb{R}$).

Spečteme $f'(x)$, totiž pomocí derivace součinu a řetězového pravidla

$$f'(x) = \sin \frac{1}{x} + x \left(\cos \frac{1}{x} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \sin \frac{1}{x} - \frac{\cos \frac{1}{x}}{x}$$

na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Všimneme si že $\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$, totiž

$$f'\left(\frac{1}{2k\pi}\right) = -2k\pi, \quad f'\left(\frac{1}{(2k+1)\pi}\right) = (2k+1)\pi$$

Přitom $\frac{1}{2k\pi} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ zatímco $\pm k\pi \rightarrow \pm \infty$.

Derivace f je spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tudíž lokální extrémy se nabývají pouze v bodech $f'_x = 0$ totiž když $x \sin \frac{1}{x} = \cos \frac{1}{x}$, totiž $\operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$ (protože $\sin \frac{1}{x} \neq 0$ když $\cos \frac{1}{x} = 0$)

Jelikož $\operatorname{tg} t - t$ změní znaménko v každém bodě $\{t: \operatorname{tg} t = t\}$, platí, že

$f'(x)$ změní znaménko v každém bodě $\{x: \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\}$ a tudíž f má lokální extrém v každém takovém bodě.

Spočítáme

$$f''(x) = -\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} + \frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} - \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^3} = -\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^3}$$

f'' změní znaménko $\Leftrightarrow \sin \frac{1}{x}$ změní znaménko

$$\Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{1}{k\pi} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Z toho vyplývá, že f je konvexní na každém z intervalů

$$\left(\frac{1}{2k\pi}, \frac{1}{(2k-1)\pi} \right) \text{ a konvexní na } \left(\frac{1}{(2k+1)\pi}, \frac{1}{2k\pi} \right) \text{ a } \left(\frac{1}{\pi}, \infty \right).$$

Graf f :

