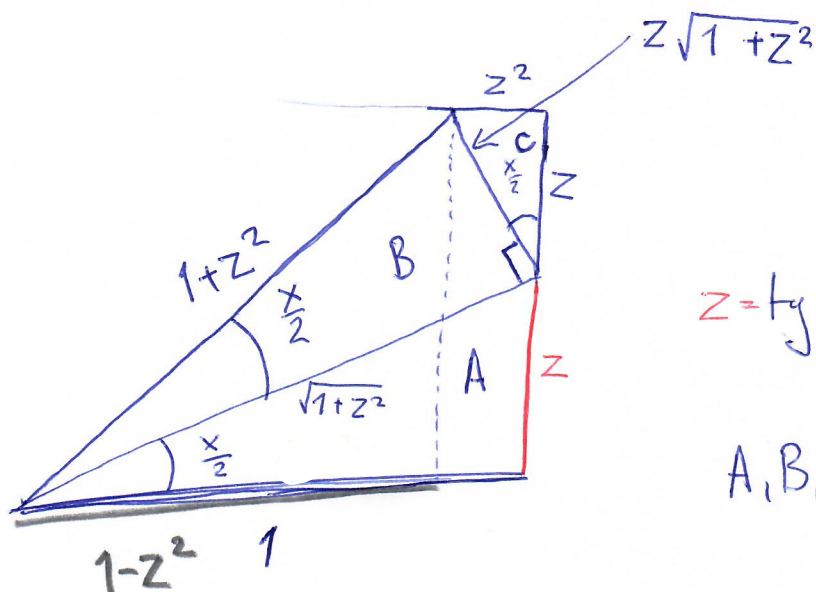


Weierstrassova Substituce

Substituci $z = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ můžeme používat pokročile, když chceme zintegrovat $R(\sin(x), \cos(x))$ kde R je racionální lomená funkce.



$$z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

A, B, C jsou podobné trojúhelníky.

Zobrazku je
vidět, že :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2} \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$$

Protože platí že $x = 2 \operatorname{arctg} z$ pro $x \in (-\pi, \pi)$
je $dx = \frac{2}{1+z^2} dz$.

Potom

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx$$

$$\leadsto \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2}{1+z^2} dz$$

což je integrál rac. lom. fce.

Př:

$$\int \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} dx \leadsto \int \frac{2z}{(1+z^2) \cdot \left(1 + \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} \frac{2}{1+z^2} dz$$

$$= \int \frac{4z}{2(1+z^2)} dz = \int \frac{2z}{(1+z^2)} dz = \ln(1+z^2)$$

$$\leadsto \ln\left(1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -2 \ln\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right) = -\ln(1+\cos(x)) + C.$$

$x \in (-\pi, \pi) + 2k\pi.$

Př $\int \operatorname{tg}(x) \cdot \sin(x) dx = \int \frac{\sin^2(x)}{\cos x} dx$

$$= \int \frac{4z^2(1+z^2)}{(1+z^2)^2(1-z^2)} \frac{2}{(1+z^2)} dz = 8 \int \frac{z^2}{(1+z^2)^2(1-z)(1+z)}$$

Povedeme roklad na parciální zlomky a integroveme standardně. Povedeme zpětnou substituci.