

①

Rozklad na Parciální Zlomky

Mějme racionálně lomenou funkci $\frac{p(x)}{q(x)}$, kde p, q jsou polynomy, nesoudělné. Chceme najít $q_1, \dots, q_n$ jednoduššího tvaru t.j. buď $q_i(x) = ax + b \approx x + \frac{b}{a}$ nebo $q_i(x) = \frac{1}{(x+a)^2 + b}$,
 (To, že to jde je hlavně otázka Lineární Algebra)

takové, že

$$\frac{1}{q(x)} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{q_i(x)}$$

Př

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

Nechť platí $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, Pak (násobením x^2-1) máme)

$$1 = A(x+1) + B(x-1)$$

Toto je soustava 2 lineárních rovnic

báze: $1, x$

$$\begin{array}{c} A \\ B \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ x \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$1 = A - B \quad A = \frac{1}{2}$$

$$x \cdot 0 = Ax + Bx \quad B = -\frac{1}{2}$$

②

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}.$$

Důkazem přeč to chceme udělat:

- $\int \frac{1}{x+b} dx = \ln|x+b| \quad x \in (-\infty, -b), \text{ nebo } x \in (-b, \infty).$

- $b > 0 \quad \int \frac{1}{(x+a)^2+b} dx = \frac{1}{b} \int \frac{1}{\left(\frac{x+a}{\sqrt{b}}\right)^2+1} dx \quad \begin{matrix} t = \frac{x+a}{\sqrt{b}} \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{b}} \end{matrix} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{b}} \int \frac{1}{t^2+1} dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}} \arctg t \quad \begin{matrix} t \in \mathbb{R} \\ \rightsquigarrow \end{matrix} \frac{1}{\sqrt{b}} \arctg\left(\frac{x+a}{\sqrt{b}}\right). \quad x \in \mathbb{R}$$

- $\int \frac{Ax+B}{(x+b)^2} dx = \underbrace{A \int \frac{x+b}{(x+b)^2} dx}_I + (B-Ab) \underbrace{\int \frac{1}{(x+b)^2} dx}_{II}$

$$I = A \ln|x+b| \quad x \in (-\infty, -b) \text{ nebo } (-b, \infty)$$

$$II = (B-Ab) \left(-\frac{1}{x+b} \right) \quad x \in (-\infty, -b) \text{ nebo } (-b, \infty).$$

Př

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+1)^2(x-1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \\ &= \frac{\tilde{A}}{x-1} + \frac{\tilde{B}x + \tilde{C}}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Vyber si ten který ti více vyhovuje. Každý má svoji výhodu.

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

$$\int \frac{(x+a)}{(x+a)^2+b} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2(x+a)}{(x+a)^2+b} dx$$

$$\left[\left((x+a)^2+b \right)' = 2(x+a) \cdot 1 \right]$$

$$= \frac{1}{2} \ln |(x+a)^2+b| \quad x \in \mathbb{R}.$$

Násobíme jmenovatelem této strany

$$1 = A(x+1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x-1) (*)$$

platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Řešme rovnici/soustavu

$$\begin{array}{c} A \quad B \quad C \\ 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}.$$

Existuje ale jednodušší způsob jak najít A, B, C,

Rovnost (*) pokud platí pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, pak platí pro $x \in \mathbb{R}$. Dosadíme $x=1$

$$1 = (x+1)^2 A = 4A \quad A = \frac{1}{4}$$

$$\text{Dosadíme } x=-1 \quad -2C = 1, \quad C = -\frac{1}{2}.$$

Známe-li už A a C, dopočítáme B z rovnice,

ktej je ale už mnohem snazší viz rovnici

$$\text{v } x^2 \quad A = -B \quad B = -\frac{1}{4}.$$

- Někdy je třeba jít přes komplexní čísla :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{\left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)} = \frac{Ax+B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx+D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}$$

Neboli

$$\odot 1 = (Ax+B)\left(x + \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + (Cx+D)\left(x - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

Můžeme rozložit i komplexní čísla :

pokud $\odot$ platí na $\mathbb{R}$, pak platí na $\mathbb{C}$.

Dostaneme (dekompozicí $\pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$) 2 soustavy
o dvou rovníc ... nehodí soustavu jako

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \right) \text{ a to se řeší mnohem snadněji}$$

než obecná soustava.

Eulerova Substituce

Toto se hodí na integrály, které mají za integrand racionální funkci proměnné x a $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Substituce má tvar:

$$\text{I)} \quad t := \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x \quad \dots a > 0$$

$$\text{II)} \quad t := \frac{\sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{c}}{x} \quad a \leq 0, c > 0$$

Př
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

Integrand je $R(s, \mathbb{Z}) = \frac{1}{s^2 \mathbb{Z}}$ $s = x, \mathbb{Z} = \sqrt{x^2+2x+2}$

Což je racionální funkcí s a $\mathbb{Z}$. Zvolíme (protože $a=1>0$)

Eulerova substituce I, totiž

$$t := \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x = \sqrt{x^2+2x+2} + x$$

$$t - x = \sqrt{x^2+2x+2}$$

umocníme na druhou

odčtou se

$$t^2 - 2xt + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 2x + 2$$

$$t^2 + 2x(1-t) = 2 \quad \dots \cdot \frac{1}{2} \frac{t^2-2}{t-1} \stackrel{\textcircled{\Delta}}{=} x$$

$$(*) \, dx = \frac{1}{2} \frac{2t(t-1) - (t^2-2)}{(t-1)^2} dt = \frac{1}{2} \frac{t^2-2t+2}{(t-1)^2} dt.$$

Dále víme, že

$$\sqrt{x^2+2x+2} = t - x = t - \frac{1}{2} \frac{t^2-2}{t-1} \stackrel{(\square)}{=} \frac{1}{2} \frac{t^2-2t+2}{(t-1)}.$$

Proto

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+2x+2}} dx \rightsquigarrow \int \frac{\frac{1}{2} \frac{t^2-2t+2}{(t-1)^2} dt}{\frac{1}{4} \frac{(t^2-2)^2}{(t-1)^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{t^2-2t+2}{(t-1)}}$$

(Note: The diagram shows a red box around the integrand transformation, a red arrow from a circled 'x' to the top part, and blue arrows from a circled 'x' and a circled 'Δ' to the bottom part.)

$$= 4 \int \frac{t-1}{(t^2-2)^2} dt - \text{Toto je již příklad na rozklad na parciální zlomky.}$$

Př $\int \frac{1}{x \sqrt{1-x^2}} dx$

$C=1>0$ $a=-1<0$ použijeme Eulerovu Substituci II, totiž

$$tx = \sqrt{1-x^2} + 1$$

$$tx - 1 = \sqrt{1-x^2} \dots t^2 x^2 - 2tx + 1 = 1 - x^2$$

$$x^2(t^2+1) = 2tx$$

$$x = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$dx = \frac{2(t^2+1) - 4t^2}{(t^2+1)^2} dt$$

$$\sqrt{1-x^2} = tx - 1 = \frac{2t^2}{t^2+1} - 1 = \frac{t^2-1}{t^2+1}$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx \rightarrow 2 \int \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} \cdot \frac{t^2+1}{t^2-1} \cdot \frac{t^2+1}{2t} dt$$

$$= -2 \int \frac{1}{2t} = -\ln|t| \rightarrow \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1} \right|$$

$t \neq 0$

$t=0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}+1=0$
nikdy

$x \in (-1, 1).$