

Primitivní Funkce a Integrál

Nechť $F, f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $\exists F'(x) \forall x \in (a, b)$

a $F'(x) = f(x) \forall x \in (a, b)$. Pak říkáme,
že F je Primitivní Funkcí k f na (a, b) .

Pozn Primitivní Funkcí je primitivní funkce na
intervalu. Musíme uvedy uvést interval platnosti.

Př PF k $x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ pro $x \in (0, \infty)$, $\alpha \neq -1$.

Výpočet: $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1} x^\alpha = x^\alpha$ pro $x > 0$
 $\alpha \neq -1$.

Př PF k $\sin x + \cos x$ je $-\cos x + \sin x$
 $x \in \mathbb{R}$.

Výpočet: $(-\cos x + \sin x)' = \sin x + \cos x$.

Značení Soubor všech primitivních funkcí
(jsou to všechny stejné funkce až na přidání konstanty)
se značí takto

$$F(x) + C =: \int f(x) dx \text{ na } (a, b).$$

Per Partes: Začneme derivací součinu

$$(uv)' = u'v + uv' \text{ a k němu najdeme P.F.}$$

$$uv = \int (uv)' = \int u'v + \int uv'. \text{ Přehodíme 2 členy:}$$

$$\int u'v = uv - \int uv'.$$

Př $\int x e^x dx$ označme $e^x =: u' \Rightarrow u = e^x$
 $x =: v \Rightarrow v' = 1$

$$\int x e^x dx \stackrel{\text{P.P.}}{=} x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C \text{ na } \mathbb{R}.$$

Př $\int x^2 \sin x dx$

$$u' = \sin x \Rightarrow u = -\cos x$$

$$x^2 =: v \Rightarrow v' = 2x$$

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + \int 2x \cos x$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Použijeme P.P. opět
přitom - vzniklé členy
mají stejnou roli jako dříve
jejich původce

Př $\int \ln x dx$ „Průmyslové“ 1 :

$$v' = 1 \Rightarrow v = x$$

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{x}{x} dx \stackrel{(*)}{=} x \ln x - x, x > 0$$

Kde rovnost $(*)$ rozumíme až na aditivní konstantu.

Př $\int e^x \sin x dx$

Pořadí rolí není zde u tomto příkladě předstívané.

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x + \int e^x \cos x$$

$$v' = e^x \quad v = e^x$$

$$u = \sin x \quad u' = \cos x$$

Udělejme opět to samé zachovávající role členů:

$$\int e^x \sin x = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

Tedy jsme dorazili na integrál původní. Přičteme na obě strany a dělíme 2.

$$\int e^x \sin x = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}$$

Základní Substituce

Začneme s řetězkovým pravidlem, totiž

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) g'(x) \quad \text{na } (a, b)$$

Vymění za f, F a necht' F' označíme jako f
pak výraz výše je

$$(F \circ g)'(x) = f \circ g(x) \cdot g'(x).$$

Zintegrujeme

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) \quad \text{na } (a, b).$$

- Pokud f je složeno s funkcí g a pak ještě násobíme g' , pak stačí najít primitivní $k f$ a tu složit s g

$$\underline{Pr} \quad \int x \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2)$$

Zde $g(x) = x^2$ $g'(x) = 2x$ Primitivní funkce $k \sin$ je $-\cos$. Tudiž

$$\int x \sin(x^2) dx = -\frac{1}{2} \cos(x^2), \quad -\frac{1}{2}(\cos x^2)' = -\frac{1}{2} \cdot 2x (\sin(x^2)) \\ = x \sin(x^2) \\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Způsob výpočtu:

Často uvedeme proměnnou novou, které nahradí $g(x)$.
Pak můžeme pracovat pouze s funkcí $f(\cdot)$.

Př $\int \cos x e^{\sin x} dx$ Označme $\boxed{t = \sin x}$
 $x \in \mathbb{R}$, pak $\boxed{t \in [-1, 1]}$.

$\leadsto \int e^t dt = e^t + C \leadsto e^{\sin x} + C$ $\boxed{dt = \cos x dx}$

$\forall t \in \mathbb{R} \supset [-1, 1]$, tudíž

$\int \cos x e^{\sin x} dx = e^{\sin x} + C \quad x \in \mathbb{R}.$

Co, když g' tam nemáme? Přeměníme f .

Př $\int \cos(\sqrt{x}) dx$ - chceme použít substituci
 $t = \sqrt{x}$ ale "chybí" $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Nasebíme a vynásobíme $2\sqrt{x}$. Dále máme $t^2 = x \Rightarrow 2t dt = dx$

$\int \cos \sqrt{x} dx = \int \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} dx \leadsto \int 2t \cos(t) \cdot 2t dt$

Toto lze spočítat Per Partes.