

Věta (l'Hopital)

Nechť $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, mají derivaci na $\mathbb{R} \setminus \{a\}$,
necht' $a \in \mathbb{R}^*$, necht' $g(x), g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$

Dále necht' $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \begin{cases} 0 \\ \pm \infty \end{cases}$

a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}^*$. Pak
limita existuje a platí rovnost

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Př

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x+1} = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} \quad \left(\begin{matrix} \text{neplatilo } \frac{f \rightarrow 0}{g \rightarrow 0} \end{matrix} \right)$$

$$\frac{\text{Př}}{\text{S, } \lambda > 0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\delta}{e^{\lambda x}} \quad x^\delta \rightarrow \infty \quad e^{\lambda x} \rightarrow \infty$$

derivace existují, $e^{\lambda x} > 0$,

Pozitivně $\lim \frac{f'}{g'}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\delta x^{\delta-1}}{e^{\lambda x}}$. Situace je obdobná,

můžeme zderivovat znovu (n-krát) dokud není $\delta - n \leq 0$

Pak je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\delta!}{(n+1)!} (\delta - n)! x^{\delta-n}}{e^{\lambda x}} = 0$ čitatel je omezený
jmenovatel má limitu ∞ .

$$\underline{Pr} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\delta} \quad \begin{matrix} \ln x \rightarrow \infty \\ x^\delta \rightarrow \infty \end{matrix}$$

$$x^\delta > 0 \quad (x^\delta)' = \delta(x^{\delta-1}) > 0,$$

$$\underline{Plat} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\delta} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\delta x^{\delta-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta x^\delta} = 0.$$

$$\underline{Pr} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} : \quad \begin{matrix} x \rightarrow \infty & e^{\lambda x} \rightarrow \infty \\ e^{\lambda x} > 0 \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\lambda x}} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

$$\underline{Pr} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctg x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$

$$\arctg x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\left(\arctg x - \frac{\pi}{2} \right)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad \left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'Hop}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = -1.$$