

① Derivace

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}$. Definujeme

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f'^+ , f'^- jsou limity zprava resp. zleva.

Ekvivalentně
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - (f(a) + f'(a)h)}{h} = 0$$

neboli $f(a) + f'(a)(x-a)$ je jednoznačně definovaná nejlepší lineární aproximace f blízko bodu a .

Funkci $f(a) + f'(a)(x-a)$ říkáme funkce tečny k f v bodě a .

Derivace je lineární

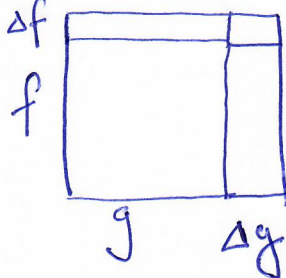
$a \in \mathbb{R}$, $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b, c \in \mathbb{R}$ $\exists f'(a), g'(a)$.

$$(bf + cg)'(a) = b \cdot f'(a) + c \cdot g'(a).$$

Derivace součinu

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

pokud $\exists f'(a), g'(a)$



② Derivace podílu

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

pokud $\exists f'(a), g'(a)$
 $g(a) \neq 0$

Derivace složené funkce (řetězové pravidlo)

$b, a \in \mathbb{R} \quad \exists g'(a) \quad g(a) = b \quad \exists f'(b)$, pak

$$(f \circ g)'(a) = f'(b)g'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Derivace inverzní funkce

$a \in \mathbb{R} \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ rostoucí (klesající) na intervalu $I \ni a$

$\Rightarrow \exists f^{-1}$ na intervalu $f(I) = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in I, f(x) = y\}$

označíme $b := f(a)$, pak

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Ekvivalentně

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

③ Derivace polynomu dle definice

Nechť $n \in \mathbb{N}$

$$(X^n)' = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x^{n-1} + xa^{n-2} + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1} \\ = na^{n-1}$$

derivace konstanty je nula.

Dále používáme linearity

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right)' = \sum_{k=0}^n (a_k x^k)' \\ = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$$

Derivace Rac. Lom. fce

Použijte derivace polynomu a podílů.

Důležité derivace

$$\left. \begin{aligned} (e^x)' &= e^x \\ (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned} \right\} x \in \mathbb{R}$$

④ Společně derivaci

$\ln x$ na $(0, \infty)$

Chápeme $\ln x$ jako inverzní k funkci e^x

Nechť $x \in (0, \infty)$ a najdeme k němu y : $e^y = x$

pak dle věty o derivaci inverzní funkce je

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in (0, \infty)$$

Společně derivaci

$\arcsin x$

Chápeme $\arcsin x$ jako $(\sin|_{(-\pi, \pi)})^{-1}$

Nechť $x \in (-1, 1)$ a k němu najdeme $y \in (-\pi, \pi)$

$\sin(y) = x$, pak

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{|\cos y|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$\forall x \in (-1, 1)$.

⑤ Spejete derivaci

- x^a pro obecné $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

$$x^a = e^{a \ln(x)}$$

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' \quad \text{použijeme derivace
skložené funkce}$$

$$(e^x)' = e^x \quad (a \ln x)' = \frac{a}{x}$$

Tudíž máme

$$(e^{a \ln x})' = \frac{a}{x} e^{a \ln x} = a x^{a-1} \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ \forall x > 0.$$

- a^x pro $a > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})'$$

$$= e^{x \ln a} (x \ln a)'$$

$$= e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a. \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left(e^{x^2} \sin x \right)' &= \left(e^{x^2} \right)' \sin x + e^{x^2} (\sin x)' \\ &= e^{x^2} \cdot 2x \sin x + e^{x^2} \cos x. \end{aligned}$$

$$\textcircled{11} \left(\frac{x^2 + \sin x}{x^4 + 1} \right)' = \frac{(2x + \cos x)(x^4 + 1) - (x^2 + \sin x) 4x^3}{(x^4 + 1)^2}$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

⑥ Derivare

$$(\arctg x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'}.$$

$$\left| (\operatorname{tg} y)' = \left(\frac{\sin y}{\cos y} \right)' = \frac{\cos y \cos y + \sin y \sin y}{\cos^2 y} \right.$$
$$\left. = \frac{1}{\cos^2 y} \right|$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\left| \frac{1}{\cos^2 y} = \right.$$

$$\left. \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1 \right|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$