

OKOLÍ ∞

"Prstencové okolí ∞ " je (K, ∞) pro nějaké $K \in \mathbb{R}$.

Poučení Být blízko ∞ znamená být větší než K . Blížit se K ∞ znamená postupně "vylézt" nad K pro každé (velké kladné) K .

Definice limity

Nechť $b \in \mathbb{R}$. Říkáme, že pro $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ pokud $\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0$:

$$\forall x > K \text{ platí } |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Říkáme že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ pokud

$$\forall K_1 > 0 \exists K_2 > 0 : f(x) > K_1$$

$$\forall x > K_2.$$

$$\underline{Pr} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Nechť $\varepsilon > 0$ dáno chceme $|\frac{1}{x} - 0| < \varepsilon$

tedy $\frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < x$. Víme že

$x > K$ takže stačí zvolit $K = \frac{1}{\varepsilon}$ pak $x > \frac{1}{\varepsilon}$.

Př $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$

Chceme $\ln x > K_1$ přitom víme $x > K_2$

$$\ln x > K_1 \Leftrightarrow x > e^{K_1}, \text{ totiž stačí zvolit}$$

$$K_2 := e^{K_1}.$$

Limity typu „ $\frac{f}{g}$ “

Limity typu $\frac{f(x)}{g(x)}$ kde $f(x) \rightarrow \infty$ a $g(x) \rightarrow \infty$

nebo $f(x) \rightarrow 0$ a $g(x) \rightarrow 0$ se dá chápat

jako závod „kdo se dostane k ∞ (resp. k 0) rychleji“.

Př $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x + 7}$

Jednoduše vidíme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 + x + 1 = \infty$ a

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^x + 7 = \infty$. Proto říkáme, že se jedná o

limitu typu „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ - a nelze použít aritmetiku limit.

První pozorování čítele lze nahradit jeho nejrychlejší

robtací částí totiž x^2 . Totiž: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$

3

Druhé porovnání Nejrychlejší rostoucí část
jmenovatele je e^x , totiž

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 7}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 7e^{-x} = 1$$

Protože $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$

Zvol $K_2 := \ln K_1$ nebo použij
 $e^x \geq 1+x$

Proto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{e^x + 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \cdot \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{e^x}{e^x + 7} \right)$$

↑ 1 ↑ 1

Nyní lze vyřešit pouze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$.

Tuto limitu můžeme vyřešit pomocí aritmetiku limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{e}^x} \cdot \frac{x}{\sqrt{e}^x} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{e})^x} \right)^2,$$

pokud víme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt{e})^x} = 0$.

Dokažme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1$.

Lze napsat $a = 1 + \delta$, $\delta > 0$ protože $a > 1$.

$a^x \geq a^{\lfloor x \rfloor} = (1 + \delta)^{\lfloor x \rfloor}$, kde $\lfloor x \rfloor$ je dolní celá část
čísla x . Pomocí binomické věty

$$(1 + \delta)^{\lfloor x \rfloor} \geq 1 + \lfloor x \rfloor \delta + \frac{\lfloor x \rfloor (\lfloor x \rfloor - 1)}{2} \delta^2$$

4

Máme $(1+\delta)^{\lfloor Lx \rfloor} \geq \frac{\delta^2}{2} (Lx)^2 - Lx$.

Protože $\lfloor Lx \rfloor \geq x-1$ a $\lfloor Lx \rfloor \leq x$,

máme $\lfloor Lx \rfloor^2 - \lfloor Lx \rfloor \geq (x-1)^2 - x = x^2 - 3x + 1$

Celkově

$$\frac{x}{a^x} \leq \frac{2}{\delta^2} \frac{x}{x^2 - 3x + 1} = \frac{2}{\delta} \frac{x}{x^2} \frac{1}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

$$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\frac{1}{1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} \rightarrow 1 \text{ dle aritmetiky limit.}$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 0$

tudiž $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a^x} = 0 \quad \forall a > 1.$

Speciálně $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(e)^x} = 0.$

Důsledek

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ a } \forall a > 1.$$

tudiž $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt[n]{a})^x} = 0$ a použijeme

aritmetiku limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{a^x} = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(\sqrt[n]{a})^x} \right)^n = 0^n = 0.$$

Růstová škála

Některé funkce lze zařadit do „růstové škály“ podle toho co roste rychleji. Růstová škála u ∞ je jiné než u 0!

Růstová škála u ∞ .

Zřejmě x^m roste rychleji u ∞ než x^n pokud $m > n$. Tím myslíme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{x^n} = \infty, \text{ což je zřejmé protože}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{m-n} = \infty.$$

Značíme: $x^m \gg x^n$ u ∞ .

Už jsme dokázali že $\forall a > 1 \quad \forall m$ platí
 $a^x \gg x^m$ u ∞ .

Pf $\ln x \ll x^\delta \quad \forall \delta > 0$.

Použijeme věty o limitě složených funkcí:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} e^y = \infty \quad x = e^y \quad x \rightarrow \infty \Leftrightarrow y \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\delta} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln e^y}{e^{\delta y}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y}{(e^\delta)^y} = 0.$$

Růstová škála u ∞

$$(\ln x^m)^a \approx (\ln x)^a \ll (\ln x)^b \ll x^a \ll x^b \ll a^x \ll b^x \ll a^{(x^2)}$$

$a < b$

a podobně mezi stupně jako například

$$x^2 \ll x^2 \ln x \ll x^{2+\delta} \quad \forall \delta > 0.$$

Limita typu „ $\frac{f}{g}$ “

- ① Pokud potřeba najdi zjednodušenou funkci $f_1 \approx f$ a $g_1 \approx g$ kterou bychom popsali jako „hlavní část“.

Př $3x^2 + x + 1 \approx x^2$, $e^x + x^2 \approx e^x$, $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \approx \frac{1}{\sqrt{x}}$

Kde $f_1 \approx f$ znamená, že $\lim \frac{f_1(x)}{f(x)} \in (0, \infty)$.

- ② Porovnat f_1 a g_1 dle růstové škály

$$f_1 \ll g_1 \Rightarrow \text{limita je } 0$$

$$f_1 \gg g_1 \Rightarrow \text{limita je } \pm \infty \text{ - znaménko se zjistí z } \lim \frac{f_1}{f_1} \cdot \lim \frac{g_1}{g_1}$$

$f_1 = g_1$ - lze použít aritmetiku limit.

$$\textcircled{B2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot 2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}$$

$$f = 2x \quad g = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$$

f není třeba zjednodušit. Půjčme ukázat, že

$$g(x) \approx x \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{2} \in (0, \infty)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + \sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{2} = 1.$$

B6)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$$

Intuice bez +1 ... $\ln 3^x = x \ln 3$

tudíž se nám zdá že $\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \rightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2}$

$$\text{Použijme } \ln(3^x) \leq \ln(1+3^x) \leq \ln(2 \cdot 3^x) = \ln e^{(x \ln 3 + \ln 2)} \\ \underset{x \ln 3}{=} \quad \quad \quad = x \ln 3 + \ln 2.$$

$$\text{Podobně } x \ln 2 \leq \ln(1+2^x) \leq x \ln 2 + \ln 2.$$

Tudiž

$$\frac{x \ln 3}{x \ln 2 + \ln 2} \leq \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} \leq \frac{x \ln 3 + \ln 2}{x \ln 2} \rightarrow \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

$$\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Na obě limity stačí použít aritmetiku limit. Tudiž dle věty o 2 polícajtech

(o sevřené funkci) (squeeze theorem) je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

B9)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^a}{(\ln x)^b}$$

- limita je ∞ okamžitě uvidíme z růstové škály.

$$\frac{x^a}{(\ln x)^b} = \left(\frac{x^{\frac{a}{b}}}{\ln x} \right)^b \underset{y = \ln x}{=} \left(\frac{e^{\frac{a}{b} y}}{y} \right)^b \rightarrow \infty^b = \infty \text{ pro } b > 0$$

dle VOLSF a spozitosti fce $x \rightarrow x^b$.

$$B17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)}{\ln(x^2)}$$

$$\text{Intuice } \frac{x^2-3}{x+1} \approx x$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right) \approx \ln x$$

$$\ln x^2 = 2 \ln x$$

limita existuje a je $v \in (0, \infty)$

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

9)

$$\ln\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right) = \ln\left(x - \frac{x+3}{x+1}\right)$$

$$= \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1+\frac{3}{x}}{x+1}\right)$$

Tudiž

$$\frac{\ln\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)}{\ln(x^2)} = \frac{\ln x + \ln\left(1 - \frac{1+\frac{3}{x}}{x+1}\right)}{2 \ln x}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\ln\left(1 - \frac{1+\frac{3}{x}}{x+1}\right)}{2 \ln x} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

$\nearrow 0$
 $\searrow \infty$

Limita čitatelek:

$$\frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \text{ tím spíše } \ln(1+y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

$$a \quad \frac{1+\frac{3}{x}}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Limita jmenovatele: $\ln x \rightarrow \infty$ $x \rightarrow \infty$ je jednoduché
z definice viz PŘ 2 na straně 2.

10)

Limity typu f^g 1) Použijte $a^b = e^{b \ln a}$ tím padem máme

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln(f(x))} \quad (\text{Pozor tedy nutně } f > 0)$$

2) Použijte VOLSF $\lim_{x \rightarrow a} e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \ln f(x)}$

$$C5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Počítáme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \stackrel{y=x^2}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \stackrel{\text{známá}}{=} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Tudiž $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin^2 x} = 1$

$$\ln(1) = 0 \quad e^0 = 1 \quad \text{Tudiž}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = 1.$$

$$C8) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$y = \frac{1}{x} \quad x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0^+$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} (\sin y + \cos y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{y} \ln(\cos y + \sin y)}$$

$$\frac{\cos y - 1 - \frac{y^2}{2}}{y^2} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \quad \text{Toto je známá limita.}$$

$$\frac{\sin y - y}{y} \rightarrow 0$$

$$\text{Tudiž } (*) \frac{\cos y + \sin y - (1 + y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$$

$$1 \nearrow \frac{\ln(\cos y + \sin y)}{\cos y + \sin y - 1} = \frac{\ln(\cos y + \sin y)}{y} \cdot \frac{y}{\cos y + \sin y - 1} \xrightarrow{(*)} 1$$

známá limita

$$\Rightarrow \frac{\ln(\cos y + \sin y)}{y} \rightarrow 1$$

Proto

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{y} \ln(\cos y + \sin y)} = e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$12 \quad C14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$x^2-1 = x^2+1 - 2 \quad \text{proto}$$

$$\frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$$

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right)}$$

Použijeme $\frac{\ln(1+y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1 \quad y = -\frac{2}{x^2+1}$

$$\frac{\ln \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right)}{-\frac{2}{x^2+1}} \cdot \frac{-\frac{2}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$$

1

$$e^0 = 1 \quad \text{proto} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$C14') \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)^{x^2} = e^{-2}$$

$\vee (*)$ použij $\frac{-2x^2}{x^2+1} \rightarrow -2.$