

Definice limity funkce

Necht' $a, b \in \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

Ríkáme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}.$$

Pr

Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$

Res:

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně, chceme

$$|x^2 - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow |(x+2)(x-2)| < \varepsilon$$

BÚNO můžeme předpokládat (vyžadovat), že $0 < \delta < 1$, což implikuje, že $|x+2| < 5$.

$$\text{Pak } |x^2 - 4| < 5|x-2|$$

$$\text{Položme } \delta := \frac{\varepsilon}{5} \quad \text{pokud } \frac{\varepsilon}{5} < 1$$

$$\text{a } \delta := \frac{1}{5} \quad \text{jinak.}$$

$$\text{Pak je } 5|x-2| < 5\delta = \frac{5\varepsilon}{\varepsilon} = \varepsilon,$$

což je kýžená nerovnost.

Overte druhý případ sami, totiž, že $|x^2 - 4| < 1$ pokud $|x-2| < \frac{1}{3}$

Pr Dokážte z definice, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Reo Platí $\forall x \neq 1$, že $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$

tudiž stačí dokázat, že

$$\lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

Zde ale můžeme jednoduše položit $\delta := \varepsilon$

pak, pokud $|x - 1| < \delta = \varepsilon$

pak je $|x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$

což je kýžený odhad.

Definice limity funkce (Hodnota $+\infty$)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Říkáme, že $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ pokud

$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0$ takové, že

$$f(x) > K \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}.$$

Ekuivalentně $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon} \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} -f(x) = \infty.$$

Pr Dokažte, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Řeš Nechť $K > 0$. Chceme dokázat, že

$$\frac{1}{x^2} > K \quad \text{jakmile } 0 < |x - 0| < \delta.$$

$$\text{Totiž } x^2 < \frac{1}{K} \quad (\text{pro } K > 0)$$

$$\text{což je ekvivalentní s } |x| < \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

$$\text{Tedy stačí položit } \delta := \frac{1}{\sqrt{K}}.$$

$$\frac{1}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jednostranné limity

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Říkáme, že $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$, pokud
 $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(x) - b| < \varepsilon$
pokud $x \in (a, a + \delta)$.

Podobně $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$, pokud $\dots x \in (a - \delta, a)$

Podobně pro $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty : \forall K > 0 \quad \exists \delta > 0$
 $f(x) > K \quad \forall x \in (a, a + \delta)$.

Pr Dokažte, že ne-existuje $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$.

Reo 1: Zvolme $\varepsilon > 0$, $\varepsilon := 1$

k němu berme $\delta > 0$ libovolně a

$$x_1 = \frac{\delta}{2}, \quad x_2 = -\frac{\delta}{2}, \text{ pak}$$

$$x_1, x_2 \in (-\delta, \delta) \text{ ale}$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{2}{\delta}, \quad \frac{1}{x_2} = -\frac{2}{\delta}$$

$$\left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| = \frac{4}{\delta} > 1 = \varepsilon \text{ jakmile } \delta < 4.$$

Res 2:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Nechť $K > 0$ libovolné. Chceme

$$\frac{1}{x} > K \text{ . K tomu stačí } (x > 0)$$

$$\frac{1}{K} > x \text{ neboli } x \in (0, \frac{1}{K})$$

Tedy zvol $\delta := \frac{1}{K}$.

$$\text{Podobně } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \left(\text{dokažte sami} \right)$$

$$\text{Návod: } \delta := \frac{1}{-K}$$

Pak ale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ neexistuje, protože

Pokud existuje $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pak

$$\text{existuje } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b.$$

Tady však jednostranné limity se liší.

Dokažte že platí

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Aritmetika limit

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = b + c$

pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$

a $b + c$ „dává smysl“ t.j. není $\pm\infty \neq \infty$.

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = b \cdot c$

Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$

a $b \cdot c$ „dává smysl“ t.j. není $\pm\infty \cdot 0$

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$

Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$

a $\frac{b}{c}$ „dává smysl“ t.j. není $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

ani není $\frac{b}{0}$

Pr 1A:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-2)}$$

Protože $\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-2)} = \frac{x-1}{x-2} \quad \forall x \neq 1, 2$

a můžeme vyřadovat $\delta < 1$, kterým pádem
 $2 \notin (1-\delta, 1+\delta)$.

2 Definice

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = 0$. Položme $\delta := \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\}$

Pak $|x-2| > |\frac{3}{2}-2| > \frac{1}{2}$ a

$$\left| \frac{x-1}{x-2} - 0 \right| < 2|x-1| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pomoci aritmetický limit

Víme $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$ a $\lim_{x \rightarrow 1} x-2 = -1$

Protože $\frac{0}{-1} = 0$ je dobře definovaný je $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-2} = 0$.

A.5:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)}{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + \dots + 1}{x^{n-1} + \dots + 1}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \text{ platí } \lim_{x \rightarrow 1} x^k = 1$$

$$\left[\begin{aligned} x^k &< (1+\delta)^k = 1 + k\delta + \frac{k^2}{2}\delta^2 + \dots + \delta^k = 1 + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \delta^j \\ &\leq 1 + \delta k \cdot k! \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0 \end{aligned} \right.$$

$$x^k > 1 - \delta k \cdot k! \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 1$$

nyní pomocí aritmetiky limit, čítelek má m sčítanců, každý z nich má limitu 1 a limita čítelek je m , jmenovatele je n .
Podíl $\frac{m}{n}$ je dobře definovaný pro $m, n \in \mathbb{N}$ a

$$\text{tedy } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}.$$

AG:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\sqrt[4]{x} - 2)(\sqrt[4]{x} + 2)(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt[4]{x} + 2)(\sqrt{x} - 4)(\sqrt{x} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 16} \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - 4)(\cancel{\sqrt{x}} + 4)}{(\sqrt[4]{x} + 2)(\cancel{\sqrt{x} - 4})(\cancel{\sqrt{x} + 4})} = \frac{1}{4}$$

protože $\lim_{x \rightarrow 16} \sqrt[4]{x} + 2 = 2 + 2 = 4$ a

$\frac{1}{4}$ je dobře definovaný takže lze použít aritmetiku limit.

Obecněji:

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$= \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Ještě obecněji: $\left(\sqrt[2m]{a} - \sqrt[2m]{b}\right) = \frac{(\sqrt[2m]{a} - \sqrt[2m]{b})(\sqrt[2m]{a} + \sqrt[2m]{b})}{\sqrt[2m]{a} + \sqrt[2m]{b}}$

$$= \frac{\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b}}{\sqrt[2m]{a} + \sqrt[2m]{b}}$$

Ještě více obecněji: $\sqrt[m]{a} - \sqrt[m]{b} = \frac{a - b}{\sum_{k=0}^{m-1} a^{\frac{k}{m}} b^{\frac{m-k}{m}}}$

$$A \text{ (11)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{x+1}}{x}$$

Platí $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1+x} = 1$ a dále $\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1}}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$= \frac{x \cdot 1}{x \cdot (\sqrt{1+x} + 1)} \rightarrow \frac{1}{2}$$

Tudíž limita existuje právě tehdy když existují obě limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1+x} - 1)}{x} \cdot \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}} + 1}{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x} \cdot \frac{1}{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}} + 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

"Šařkarění se známými limitami"

A 18)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\ln(\cos^2 x)}{x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{x^2} \\&= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{-\sin^2 x} \cdot -\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right) \\&= -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \\&= -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

kde $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2$ dle aritmetiky limit

$$\text{a } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{-\sin^2 x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$$

dle substituce v limitě (VOLSF) $y = -\sin^2 x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$
 $\sin x \neq 0; x \neq 0.$