

①^{cy} Chceme dokázat, že
 $V(n): 1+2+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Ověříme pro $n=1$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \text{platí.}$$

Předpokládejme, že výrok $V(n)$ platí ověříme $V(n+1)$:

$$\underbrace{1+2+\dots+n}_{V(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$$

$$= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

což je $V(n+1)$.



$$\textcircled{1} \textcircled{a} V(n): \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < \frac{n-1}{n+1}$$

Chceme ověřit výrok pro $n \geq 2$.

$$V(2): \quad \cancel{\frac{1}{4}} < \frac{1}{3} \quad \text{platí a tudíž } V(2) \text{ platí.}$$

Předpokládejme, že platí $V(n)$ a ověříme $V(n+1)$

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \stackrel{V(n)}{<} \frac{n-1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2 - 1 + 1}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{(n+1)^2} < \frac{n}{n+2}$$

protože

$$\frac{n}{n+2} = \frac{n^2}{n(n+2)} = \frac{n^2}{n^2+2n} > \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$$

Tím jsme ověřili $V(n+1)$.



② a) Najděte x takové, že

$$(x-3)(x+1)(3x+6) > 0$$

Levá strana je 0 právě tehdy, když
 $x=3$, $x=-1$ nebo $x=-2$

V každém z těchto bodů se změní znaménko

L.S. protože v každém z těchto bodů změní se znaménko právě jeden z součinitelů.

L.S. je kladná pro $x > 3$ protože jsou všechny z součinitelů kladné. Pro $x \in [-1, 3]$ je výraz ~~nekladný~~ ^{záporný}. (stačí dosadit $x=0$, $-3 \cdot 1 \cdot 6 < 0$). Znaménko se opět mění v $x=-1$, tudíž $L.S. > 0$ pro $x \in (-2, -1)$

Pro $x \leq -2$ je výraz opět nekladný.

$$\begin{aligned} \text{Řešení} \quad & \{x \in \mathbb{R}; x > 3\} \cup \{x \in \mathbb{R}; -2 < x < -1\} \\ & = (-2, -1) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

② c) $|x+1| + |x-2| \leq 4$ ← najděte x , pro které platí.

Rozdělme případy kdy $|x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$

$$\text{a } |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases}$$

$-1 \leq x < 2$ je ~~48~~ nerovnice

$$x+1 + 2-x \leq 4 \quad \text{což platí vždy.}$$

$x < -1$ nerovnice je

$$-x-1 + 2-x \leq 4 \quad \text{tedy}$$

$$1-2x \leq 4 \quad -2x \leq 3 \quad x \geq -\frac{3}{2}$$

Pro $x \geq 2$ je nerovnice

$$x+1 + x-2 = 2x-1 \leq 4 \quad \text{neboli}$$

$$2x \leq 5 \quad \text{tedy} \quad x \leq \frac{5}{2}$$

Řešení:

$$\left[-\frac{3}{2}, -1\right) \cup [-1, 2) \cup \left[2, \frac{5}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

② d) $\frac{x-1}{x-2} > \frac{x-3}{x-4}$, pro které x platí?

Případ 1: $x > 4$ Pak nerovnice je ekvivalentní:

$$(x-1)(x-4) > (x-3)(x-2)$$

$$x^2 - 5x + 4 > x^2 - 5x + 6 \quad \text{což neplatí nikdy.}$$

Případ 2: $x \in (2, 4)$ - Pak nerovnice je ekvivalentní

(stejný výpočet jako dříve s rozdílem, že se otočí ~~znaménko~~ orientace nerovnosti protože $x-4 < 0$)

$$4 < 6 \quad \text{což platí}$$

Případ 3: $x < 2$ je stejný jako případ 1

protože $x-2 < 0 > x-4$ a orientace nerovnosti se změní $2x$, totiž je stejná jako v případě 1 a nerovnost neplatí.

Výsledek nerovnost platí právě tehdy když
 $x \in (2, 4)$

③ a) Dokažte, že

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

Důkaz

Nechť $x \in (A \cap B) \cap C$, pak $x \in C$.

Dále $x \in (A \cup B)$ neboli platí minimálně jeden z
výroků i) $x \in A$ ii) $x \in B$

V případě i) je $x \in A \wedge x \in C \Rightarrow x \in A \cap C$

podobně pro ii) je $x \in B \cap C$.

V každém případě platí buď $x \in (A \cap C)$ v $x \in (B \cap C)$
a tudíž $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Opakně: Nechť $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$

pak $x \in A \cap C$ v $x \in B \cap C$. Obě množiny mají
vlastnost $A \cap C \subseteq C$ $B \cap C \subseteq C$

tudíž $x \in C$. V případě a) je $x \in A$ v b) je $x \in B$

celkově je $x \in A \cup B$. Jelikož je $x \in C$ dle
vyšší je $x \in (A \cup B) \cap C$.

③ e) Dokažte, že $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

Důkaz Necht' $x \in A \setminus (A \setminus B)$ totiž

$x \in A$ ale zároveň platí $x \notin A \setminus B$ a

tudíž $x \in B$. Celkově to znamená $x \in A \cap B$.

Opakem, necht' $x \in A \cap B$ pak platí $x \in A$
a $x \in B$. To znamená že $\neg(x \in (A \setminus B))$
neboli $x \notin (A \setminus B)$. Protože $x \in A$ je

$x \in A \setminus (A \setminus B)$.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \text{ a) } f(A \cup B) &= \{y: \exists x \in A \cup B: f(x) = y\} \\
 &= \{y: \exists x \in A: f(x) = y\} \cup \{y: \exists x \in B: f(x) = y\} \\
 &= f(A) \cup f(B).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } f^{-1}(f(A)) &= \{x: \exists y: \exists a \in A \quad f(a) = y, f(x) = y\} \\
 &\supset A \text{ protože lze uřít za } a, x \text{ prvek } x \in A.
 \end{aligned}$$

Nicméně druhá inkluze neplatí: Necht' $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$

$$f^{-1}([0, a^2]) = [-a, a],$$

$$\text{nicméně } f([0, a]) = [0, a]$$

$$\text{totiž } [0, a] = f^{-1}([0, a^2]) = f^{-1}(f([-a, a]))$$

$$\text{ale } [0, a] \not\subset [-a, a].$$

⑤ a) Najděte maximum, minimum, supremum
a infimum množiny

$$M = \left\{ \frac{1}{x-1} : x \geq 0, x \neq 1 \right\}$$

$M \neq \emptyset$ protože $\frac{1}{-1} = -1 \in M$ (ukážte $x=0$)

Tvrzení M nemá ani max. ani min.

Kdokomu stačí najít $x_n \in M$: $\frac{1}{x_n-1}$ není zdola
omezená a $y_n \in M$: $\frac{1}{y_n-1}$ není shora omezené.

Pak $\sup M = \infty$ a $\inf M = -\infty$.

Za y_n zvol $1 + \frac{1}{n}$ pak $\frac{1}{\frac{1}{n} + 1 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$

Zvol $K \in \mathbb{R}$: najdeme $n > K$ $n \in \mathbb{N}$. Tedy

y_n nemá $\frac{1}{y_n-1}$ shora omezenou,

$x_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}$ a postup je stejný

Výsledek

$\sup M = \infty, \inf M = -\infty$ $\nexists \max M, \nexists \min M$

protože $\sup M = \infty$ a $\inf M = -\infty$.

⑥ a) Dokažite, že $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Dokaz $|a b| = \begin{cases} a b & \text{pokud } ab \geq 0 \\ -ab & \text{pokud } ab < 0 \end{cases}$

	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$	$ a b = a \cdot b = ab $	$ a b = -ab = ab $
$a < 0$	$ a b = -ab = ab $	$ a b = (-a)(-b) = ab = ab $

