Sbírka příkladů k přednášce Matematická analýza I a II

Luboš Pick

Obsah

Kapitola 1. Opakování středoškolské látky, logika, axiomy reálných čísel 1
1. Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce 1
Výsledky 2
2. Axiomy reálných čísel 2
Výsledky 3

Kapitola 2. Posloupnosti 5
3. Vlastní limita posloupnosti 5
Výsledky 6
4. Věty o limitách 6
Výsledky 7
5. Monotónní posloupnosti, nerovnosti s logaritmy, číslo e 7
Výsledky 9
Příklady písemkové obtížnosti 10

Kapitola 3. Řady 11
6. Konvergence řad – úvod 11
Výsledky 11
7. Řady s nezápornými členy 11
Výsledky 13
8. Řady s reálnými členy 13
Výsledky 14

Kapitola 4. Limity funkcí 15
9. Limity funkcí 15
Výsledky 16
10. Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo 16
Výsledky 17
11. Průběh funkce 17

Kapitola 5. Taylorův polynom 19
12. Taylorův polynom 19

Kapitola 6. Primitivní funkce 21
13. Snadné úpravy 21
14. Integrace trigonometrických funkcí 21
15. Metoda integrování per partes 22
16. Substituce 22
17. Lepení 22
18. Integrace racionálních funkcí 22
19. Integrace iracionálních funkcí 22
20. Eulerovy substituce 22

Kapitola 7. Funkce více proměnných 23
21. Základní pojmy 23
Výsledky 23

22. Limita a spojitost 24
Výsledky 26
23. Derivace a totální diferenciál 26
Výsledky 27
24. Řetízkové pravidlo 28
Výsledky 28
25. Implicitní funkce 29
Výsledky 29

Kapitola 8. Metrické prostory II 31
26. Úplné metrické prostory 31
27. Banachova věta o kontrakci 32
28. Souvislé prostory 33

Kapitola 9. Obyčejné diferenciální rovnice 35
20. Základní rovnice, separace proměnných 35
21. Homogenní rovnice 36
22. Exaktní rovnice 37
23. Lineární rovnice 1. řádu 38
24. Lineární rovnice vyššího řádu 38
25. Systémy lineárních rovnic 1. řádu 39

Kapitola 10. Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$ 41
35. Konvergence Lebesgueova integrálu 41
Výsledky 42
36. Záměna řady a integrálu 43
Výsledky 43
37. Záměna limity a integrálu 44
38. Integrál závislý na parametru 44
Výsledky 46

Kapitola 11. Křivkový a plošný integrál v $\mathbb{R}^n$ 47
39. Křivkový integrál 1. druhu 47
Výsledky 48
40. Křivkový integrál 2. druhu 49
Výsledky 50
41. Greenova věta 50
Výsledky 51
42. Plošný integrál 1. druhu 51
Výsledky 52
43. Plošný integrál 2. druhu 52
Výsledky 53

KAPITOLA 1

Opakování středoškolské látky, logika, axiomy reálných čísel

1. Opakování středoškolské látky, logika, matematická indukce

1.1. V oboru reálných čísel řešte nerovnost

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0.$$

1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$.

1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

1.4. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}:\ (z > x \Rightarrow y < z)$$
$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1);$$
$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \Leftrightarrow |x - \alpha| < 1).$$

1.5. Hádanky z ostrova poctivců a padouchů (podle R. Smullyana): (i) Jdete kolem tří obyvatel ostrova a zeptáte se: Kolik je mezi vámi poctivců? A odpoví nezřetelně, tak se zeptáte B: Co říkal A? B odpoví: A říkal, že je mezi námi jediný poctivec. Nato řekne C: Nevěřte B, ten lže! Co jsou B a C?

(ii) A řekne: Buď jsem já padouch a nebo B je poctivec. Co jsou A a B?

(iii) A řekne: Já jsem padouch, ale B je poctivec. Co jsou A a B?

(iv) A řekne: B a C mají stejnou povahu. Nato se zeptáte C: Mají A a B stejnou povahu? Co odpoví C?

1.6. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?
(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 41: \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

1.7. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$
$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

1.8. Dokažte zobecněnou Bernoulliovu nerovnost:

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \geq -2: \quad (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(Návod: použijte matematickou indukci s krokem $n \to n + 2$.)

1.9. Spočtěte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1.10. Nechť $a_1, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Označme postupně A_n, G_n, H_n aritmetický, geometrický a harmonický průměr čísel $a_1, \ldots, a_n$, tedy

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}. \end{aligned}$$

Dokažte nerovnost

$$H_n \le G_n \le A_n.$$

Druhá z těchto nerovností se často označuje jako tzv. AG nerovnost.

(Návod: použijte matematickou indukci s krokem $n \to 2n$ a potom znovu se zpětným krokem $n \to n-1$ k důkazu druhé nerovnosti. První nerovnost pak dokažte použitím druhé nerovnosti na převrácené hodnoty čísel $a_1, \ldots, a_n$.)

1.11. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}.$$

1.12. Dokažte nerovnost

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}.$$

(Návod: použijte AG nerovnost pro čísla $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = \frac{n}{n-1}$, $a_n = 1$.)

Výsledky

Cvičení 1.4: Všechny výroky jsou pravdivé.

Cvičení 1.5: (i) B je padouch a C je poctivec;
(ii) oba jsou poctivci;
(iii) oba jsou padouši;
(iv) ano.

Cvičení 1.6:
(ii) $n = k^2$, $k \in \mathbb{N}$;
(iii) $n = 41$;
(iv) $n = 40$.

Cvičení 1.9: 1.

2. Axiomy reálných čísel

Axiomy tělesa.

2.1. Dokažte následující tvrzení:

(i) Jestliže pro nějaké $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $x + y = x + z$, pak $y = z$.

(ii) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Pak opačný prvek $(-x)$ a inverzní prvek $\frac{1}{x}$ jsou jednoznačně definovány.

(iii) Platí:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad x \cdot 0 = 0.$$

(iv) Platí:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \quad (-x)(-y) = xy.$$

2.2. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte následující vztahy:

$$-0 = 0; \tag{2.1}$$

$$-(-a) = a; \tag{2.2}$$

$$-a = (-1) \cdot a; \tag{2.3}$$

$$(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b). \tag{2.4}$$

Axiomy uspořádání.

2.3. Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte následující vztahy:

$$0 < 1; \tag{2.5}$$

$$0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}; \tag{2.6}$$

$$x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y, \quad \text{kde} \quad 2 = 1 + 1; \tag{2.7}$$

$$0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}; \tag{2.8}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow 0 < x \cdot x; \tag{2.9}$$

$$x < 0 < y \Rightarrow x \cdot y < 0; \tag{2.10}$$

$$0 < x < 1 \Rightarrow x \cdot x < x. \tag{2.11}$$

Axiom o supremu.

2.4. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

$$A = \left\{ -\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$B = \left\{ \frac{n + (-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$C = \left\{ n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N} \right\};$$
$$D = \left\{ q \in \mathbb{Q};\ q < \sqrt{3} \right\};$$
$$E = \{ \sin x \cos x;\ x \in \mathbb{R} \}.$$

Výsledky

Cvičení 2.4:

$$\sup A = 0, \quad \inf A = -1;$$
$$\sup B = \frac{3}{2}, \quad \inf B = 0;$$
$$\sup C \text{ neexistuje}, \quad \inf C = 0;$$
$$\sup D = \sqrt{3}, \quad \inf D \text{ neexistuje};$$
$$\sup E = \frac{1}{2}, \quad \inf E = -\frac{1}{2}.$$

KAPITOLA 2

Posloupnosti

3. Vlastní limita posloupnosti

Limita posloupnosti – základy.

3.1. Který z následujících výroků platí?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A; \tag{3.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A; \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_{2n} = A; \tag{3.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = A \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = A; \tag{3.4}$$

$$a_n \le b_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n; \tag{3.5}$$

$$a_n < b_n \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n. \tag{3.6}$$

3.2. Nalezněte příklad posloupnosti a_n takové, že $|a_n|$ konverguje, ale a_n diverguje.

3.3. Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}$. Zkonstruujeme z ní novou posloupnost $\{b_n\}$ pomocí jedné z následujících úprav:
vyhodíme z $\{a_n\}$ konečně mnoho členů;
přidáme do $\{a_n\}$ konečně mnoho členů;
vyhodíme z $\{a_n\}$ nekonečně mnoho členů;
přidáme do $\{a_n\}$ nekonečně mnoho členů;
vyhodíme z $\{a_n\}$ každý sudý člen;
přidáme do $\{a_n\}$ číslo 0 mezi každé dva členy;
zpřeházíme konečné množství členů.
Rozhodněte, která z těchto operací bude mít vliv na konvergenci $\{b_n\}$ v závislosti na konvergenci $\{a_n\}$.

3.4. Pomocí definice limity posloupnosti určete, která z následujících posloupností má a která nemá limitu. V případech, kdy limita existuje, ji určete.

$$(-1)^n\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{n}\right), \qquad \frac{6n^2}{1-5n^2}, \qquad (-1)^n\frac{7n^3}{n+2n^2-4n^4}; \tag{3.7}$$

$$\frac{\sin n}{n^2}, \qquad \sqrt{n+3}-\sqrt{n}, \qquad \sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-1}; \tag{3.8}$$

$$\frac{2^n}{n!}, \qquad \frac{n^5}{2^n}, \qquad \frac{n!}{n^n}. \tag{3.9}$$

3.5. Spočítejte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}; \tag{3.10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\tfrac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\tfrac{1}{n^2}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2^2}+\tfrac{5}{2^3}+\dots+\tfrac{2n-1}{2^n}\right); \tag{3.11}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\dots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}; \tag{3.12}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}, \qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{\sqrt{n^6+4}}. \tag{3.13}$$

3.6. Udejte příklad posloupnosti racionálních čísel, která konverguje k iracionálnímu číslu. Udejte příklad posloupnosti iracionálních čísel, která konverguje k racionálnímu číslu.

3.7. Jestliže se reálné číslo b opakuje nekonečně mnohokrát jako člen konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = b$. Dokažte!

Výsledky

Cvičení 3.1: Všechny výroky jsou platné kromě (3.4) a (3.6).

Cvičení 3.2: $(-1)^n$.

Cvičení 3.4:
(3.7) neexistuje, $-\frac{6}{5}$, 0.
Všechny ostatní limity jsou rovny 0.

Cvičení 3.6: $(1+\frac{1}{n})^n$, $\frac{\pi}{n}$.

4. Věty o limitách

4.1. Vyberte konvergentní podposloupnost divergentní posloupnosti

$$a_n = (-1)^n(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{n^2}).$$

4.2. Nechť a_n konverguje k 0 a nechť b_n je omezená. Potom $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. Dokažte!

4.3. Vyšetřete konvergenci posloupnosti $\sqrt[n]{n!}$

4.4. Rozhodněte, která z následujících posloupností je (i) omezená, (ii) monotonní, (iii) konvergentní. Pokud existuje limita, určete ji.

$$n-\frac{1}{n}, \qquad n^{1-n}, \qquad \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad n^2+(-1)^n, \qquad 3^{1/n}, \qquad \sin\frac{\pi}{2n}. \tag{4.1}$$

4.5. Dokažte následující Stolzovu větu: Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou dvě posloupnosti, $\{b_n\}$ je rostoucí a neomezená a platí:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A.$$

Potom také

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A.$$

4.6. Vypočítejte pro pevné $p \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}; \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\frac{n}{p+1}\right). \tag{4.2}$$

(Návod: použijte Stolzovu větu.)

Rekurentně zadané posloupnosti.

4.7. Spočítejte limitu následující rekurentně zadané posloupnosti:

$$a_1 = k, \quad k \geq 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}.$$

4.8. Nechť x, y jsou kladná reálná čísla. Definujeme

$$a_0 = y, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a_{n-1}} + a_{n-1}\right).$$

Dokažte, že a_n je klesající a konverguje k $\sqrt{x}$, a to bez ohledu na volbu y. Použijte a_4 k přibližnému výpočtu $\sqrt{2}$.

4.9. Spočítejte limitu následující rekurentně zadané posloupnosti:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = \tfrac{1}{2}(a_{n-2} + a_{n-1}).$$

4.10. Spočítejte limitu následující rekurentně zadané posloupnosti:

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_n = \sqrt{a_{n-2} \cdot a_{n-1}}, \quad a, b > 0.$$

Výsledky

Cvičení 4.1: $(\frac{1}{2} - \frac{1}{n^2})$.

Cvičení 4.3: diverguje k $+\infty$.

Cvičení 4.6: $\frac{1}{p+1}, \quad 1 - \frac{1}{2p}$.

Cvičení 4.7: $\frac{1}{2} + \sqrt{k + \frac{1}{4}}$.

Cvičení 4.9: $\frac{2}{3}$.

5. Monotónní posloupnosti, nerovnosti s logaritmy, číslo e

5.1. Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel, splňující

$$a_{n+1} \geq a_n - b_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

a

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Dokažte, že potom $\{a_n\}$ má limitu.

5.2. Dokažte, že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ je klesající. Odtud vyvoďte, že obě tyto posloupnosti mají společnou limitu. Tuto limitu označíme symbolem e. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tedy platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \tag{5.1}$$

5.3. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost kladných reálných čísel splňující

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Dokažte, že potom

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e^{-1}.$$

5.4. Nalezněte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n; \tag{5.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)^{2^{2^n}}; \tag{5.3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{100+2n}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{99}{100}+\frac{5}{n}\right)^n. \tag{5.4}$$

5.5. Dokažte nerovnost

$$2 \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e.$$

(Návod: použijte Bernoulliovu nerovnost a příklad 5.2.)

5.6. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{k+1} < \log\left(1+\frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

(Návod: použijte nerovnost $\log(1+x) \le x$, která platí pro všechna $x > -1$ (a pro všechna $x \neq 0$ je ostrá), a vztah $1+\frac{1}{k} = (1-\frac{1}{k+1})^{-1}$.)

5.7. Dokažte nerovnost

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} < \log n < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \ge 2.$$

(Návod: posčítejte nerovnosti v příkladu 5.6 pro $k = 1, \dots, n-1$.)

5.8. Dokažte, že konverguje posloupnost

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n.$$

(Návod: dokažte, že posloupnost je monotónní a omezená.)

5.9. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right).$$

5.10. Dokažte nerovnosti

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n, \qquad n \ge 2$$

(Návod: použijte matematickou indukci, Bernoulliovu nerovnost a definici čísla e.)

5.11. Dokažte nerovnost

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e^2\left(\frac{n}{e}\right)^{n+1}, \qquad n \ge 2. \tag{5.5}$$

(Návod: použijte matematickou indukci a elementární nerovnosti (5.1).)

5.12. Dokažte následující větu: Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost s kladnými členy, splňující podmínku

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = A.$$

Potom také

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = A.$$

5.13. Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

(Návod: použijte větu z příkladu 5.12. Elementární důkaz plyne z odhadů (5.5) a věty o dvou policajtech.)

5.14. Dokažte, že věta z příkladu 5.12 neplatí obráceně.
(Návod: $a_n = \frac{3+(-1)^n}{2^{n+1}}$.)

Příklady pro koumáky.

5.15. Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right), \quad x>0.$$

5.16. Nechť
$$b_1=\sqrt{2}, \quad b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}, \quad n\in\mathbb{N}.$$
Spočtěte limitu
$$\lim_{n\to\infty} 2^n\sqrt{2-b_n}.$$

Návod: Položte $b_n = 2\cos\beta_n$ pro vhodné β_n.

5.17. Buďte a_n, b_n posloupnosti, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Položme
$$t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}.$$
Dokažte, že posloupnost t_n konverguje a najděte její limitu. Co by se stalo, kdybychom vynechali faktor $\frac{1}{n}$?

Příklad pro extrémní koumáky.

5.18. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ splňuje podmínku
$$0\le a_{m+n}\le a_m+a_n, \qquad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$
Potom existuje
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}.$$
Dokažte!

Výsledky

Cvičení 5.4:

(5.2) e^2, e^3, $\frac{1}{e}$.

(5.3) 1, ∞.

(5.4) $\frac{1}{\sqrt{e}}$, 0.

Cvičení 5.9: $\log 2$.

Cvičení 5.15: $\log x$.

Cvičení 5.16: $\frac{\pi}{2}$.

Příklady písemkové obtížnosti

5.19. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n^8 \left(2\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 2 + \frac{1}{n^4}\right).$$

5.20. Spočtěte limitu posloupnosti pro $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b}\right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}.$$

5.21. Pro která $\alpha \in \mathbb{R}$ je posloupnost $\{a_n\}$ (i) omezená, (ii) konvergentní:

$$a_n = \left(\log(e^{n^2}+1)\right)^{\alpha} \cdot \arcsin\left(\frac{1}{n^4+7}\right) \cdot (-1)^n.$$

5.22. Spočtěte limitu posloupnosti pro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n - e^{\alpha}\right).$$

5.23. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n^2+1}}.$$

5.24. Spočtěte limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right).$$

KAPITOLA 3

Řady

6. Konvergence řad – úvod

6.1. Zjistěte, zda následující řady konvergují a pokud ano, určete jejich součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+3n+4}{2n^2+5}, \qquad \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots; \tag{6.1}$$

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \dots; \tag{6.2}$$

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \dots; \tag{6.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{kde } a_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{jestliže } n \text{ je dělitelné třemi;} \\ \frac{1}{n} & \text{jestliže } n \text{ není dělitelné třemi.} \end{cases} \tag{6.4}$$

6.2. Mějme dánu řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Provedeme jednu z následujících úprav:
vyhodíme konečně mnoho členů;
přidáme konečně mnoho členů;
vyhodíme nekonečně mnoho členů;
přidáme nekonečně mnoho členů.
Rozhodněte, která z těchto operací může mít vliv na konvergenci.

Výsledky

Cvičení 6.1:
(6.1) konverguje k součtu 1, diverguje, konverguje k součtu $\frac{1}{2}$.

(6.2) diverguje.

(6.3) konverguje k součtu 0.

(6.4) diverguje.

7. Řady s nezápornými členy

Srovnávací kritérium.

7.1. Pomocí srovnávacího kritéria zjistěte, zda následující řady konvergují či divergují.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n+4}{(2n^2+5)^2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2+n}\sqrt{3n-1}}; \tag{7.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+4} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}}. \tag{7.2}$$

7.2. Dokažte následující větu: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, je konvergentní právě tehdy, když $\alpha > 1$.

(Návod: dokažte, že pro $\alpha > 1$ lze řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ odhadnout shora konvergentní geometrickou řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$, a že pro $\alpha \le 1$ lze řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ odhadnout zdola divergentní harmonickou řadou.)

Cauchyovo, d'Alembertovo a Raabeovo kritérium.

7.3. Zjistěte, zda následující řady konvergují či divergují. Použijte buď srovnávací nebo Cauchyovo nebo d'Alembertovo nebo Raabeovo kritérium.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}; \tag{7.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\dots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right); \tag{7.4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}; \tag{7.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\log n}. \tag{7.6}$$

7.4. Určete, pro které hodnoty $a > 0$ konvergují následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2 a^n}; \tag{7.7}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}; \tag{7.8}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^a \left(\log(n+1)-\log n\right)^4; \tag{7.9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+a}}. \tag{7.10}$$

(Návod: pro (7.9) použijte nerovnosti v příkladu 5.6 a pro (7.10) použijte Raabeovo kritérium.)

Výsledky

Cvičení 7.1:

(7.1) konverguje, diverguje, diverguje.

(7.2) konverguje.

Cvičení 7.3:

(7.3) konverguje (Cauchy & Cvičení 3.4), konverguje (d'Alembert), konverguje (Cauchy & Cvičení 5.13).

(7.4) konverguje (Cauchy, Cvičení 4.3 & (3.9)), konverguje (d'Alembert).

(7.5) konverguje (Cauchy), diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence), diverguje (není splněna nutná podmínka konvergence).

(7.6) konverguje (Cauchy), konverguje (funkce $\frac{1+x}{2+x}$ je rostoucí na intervalu $[-1,1]$, a tedy řadu lze shora odhadnout konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-\log n}$.

Cvičení 7.4:

(7.7) konverguje právě když $a \in (4,\infty)$ (d'Alembert a Raabe),

(7.8) konverguje právě když $a \in (0,e)$ (d'Alembert a první nerovnost ve Cvičení 5.11),

(7.9) konverguje právě když $a \in (0,3)$ (základní limita $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$ a věta z Cvičení 7.2)

(7.10) konverguje právě když $a \in (\frac{3}{2},\infty)$ (Raabe).

8. Řady s reálnými členy

Dirichletovo, Abelovo a Leibnizovo kritérium.

8.1. Vyšetřete konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{3}-1\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n2^n n}{4^n+(-1)^n n}; \tag{8.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\cos n^2)\left(\sqrt{n^6+n}-n^3\right). \tag{8.2}$$

Různá kritéria pro konvergenci řad.

8.2. Určete, pro která $z \in \mathbb{R}$ konvergují následující řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^3z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}z^n; \tag{8.3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^n}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+1}}{2n+1}. \tag{8.4}$$

8.3. Přesvědčte se, že pro vyšetření konvergence řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \quad \text{kde } a_n = \left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2,$$

nelze použít Cauchyovo, d'Alembertovo ani Raabeovo kritérium. Dokažte, že tato řada diverguje.

Výsledky

Cvičení 8.1:

(8.1) konverguje neabsolutně (Leibniz), konverguje absolutně (řadu lze shora odhadnout konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$).

(8.2) konverguje neabsolutně (Dirichlet), konverguje absolutně (řadu lze shora odhadnout konvergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^6+n}-n^3\right)$).

KAPITOLA 4

Limity funkcí

9. Limity funkcí

9.1. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{x},\ a>0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}(\frac{x}{2})},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2};\tag{9.1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin(2x)}.\tag{9.2}$$

9.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x},\ a>0,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}\qquad \lim_{x\to e}\frac{\log x-1}{x-e}.\tag{9.3}$$

9.3. Najděte $a,b\in\mathbb{R}$ tak, aby

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=0.$$

9.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{\sqrt{\sin x}}-\cos x}{\sqrt{x}},\qquad \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right);\tag{9.4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2},\ m,n\in\mathbb{N},\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg}x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}.\tag{9.5}$$

9.5. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}(2x)},\qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x3^x}{1+x5^x}\right)^{\frac{1}{x^2}},\qquad \lim_{x\to\infty}\log\left(1+\tfrac{4}{x}\right)\log(3^x-1).\tag{9.6}$$

9.6. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin(2x)}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg}x},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg}x}.\tag{9.7}$$

9.7. Spočtěte limity následujících posloupností:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n;\tag{9.8}$$

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{2}-1),\qquad \lim_{n\to\infty}\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}).\tag{9.9}$$

9.8. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\log(1+\sqrt{x})},\qquad \lim_{x\to 1}(1+\sin(\pi x))^{\operatorname{cotg}(\pi x)};\tag{9.10}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.\tag{9.11}$$

Výsledky

Cvičení 9.1: a, 2, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$.

Cvičení 9.2: $\log a$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{e}$.

Cvičení 9.3: $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

Cvičení 9.4: 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{mn}{2}(m-n)$, -12.

Cvičení 9.5: $\frac{1}{e}$, $\frac{3}{5}$, $4\log 3$.

Cvičení 9.6: 2, 1, $1-\sqrt{3}$.

Cvičení 9.7: e, $\log 2$, 0.

Cvičení 9.8: 1, $\frac{1}{e}$, $\frac{4}{3}$.

10. Derivace funkce, l'Hospitalovo pravidlo

10.1. Spočtěte:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\tfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right). \tag{10.1}$$

10.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to 0+}(\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}, \qquad \lim_{x\to \pm 0}\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} \tag{10.2}$$

10.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{pro} \quad x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro} \quad x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

10.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-1}{2\sin^2 x - 1}, \qquad \lim_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}; \tag{10.3}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0. \tag{10.4}$$

10.5. Najděte asymptotu funkce

$$f(x) = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$$

pro $x \to +\infty$.

10.6. Spočtěte limity následujících funkcí:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}, \quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2\operatorname{arctg} x}\right)^x. \tag{10.5}$$

10.7. Spočtěte derivace (i jednostranné, pokud oboustranná neexistuje) následujících funkcí:

(10.6) $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

(10.7) $$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\};$$

(10.8) $$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}};$$

(10.9) $$f(x) = \arccos \frac{1}{1 + x^2};$$

(10.10) $$f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$$

(10.11) $$f(x) = x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0;$$

(10.12) $$f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}.$$

Výsledky

Cvičení 10.1: $\frac{1}{2}$.

Cvičení 10.2: $e^{-\frac{1}{2}}$, 0, ± 1.

Cvičení 10.3: $f'(x) = \frac{1}{12}$.

Cvičení 10.4:

(10.3) $\frac{1}{3}$, $e^{\frac{2}{\pi}}$.

(10.4) $e^{\frac{1}{6}}$, $\frac{1}{a}$.

Cvičení 10.5: $\frac{x}{e} + \frac{1}{2e}$.

Cvičení 10.6: $e^{-\frac{1}{3}}$, 2, $e^{\frac{2}{\pi}}$.

11. Průběh funkce

11.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

(11.1) $$f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1};$$

(11.2) $$f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$

(11.3) $$f(x) = \log_x e;$$

(11.4) $$f(x) = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{4} \right|;$$

(11.5) $$f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$

(11.6) $$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

11.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}, \qquad f(x) = (\cos x) e^{\frac{2}{3} \sin x},$$

$$f(x) = (\log |x|)^3 - 3 \log |x|, \qquad f(x) = (x - 1) \exp\left(\frac{x}{1 + x}\right).$$

11.3. Vyšetřete průběh funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x, \qquad \sqrt[3]{x^2(1-x^2)}, \qquad \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{x^2-1}, \qquad \arcsin\left(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{1-x^2}\right).$$

KAPITOLA 5

Taylorův polynom

12. Taylorův polynom

12.1. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = e^{2x-x^2}$ stupně 3 v bodě 0.

12.2. Napište Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.

12.3. Spočtěte přibližně $\sqrt[5]{250}$.

12.4. Řešte přibližně rovnici $e^x(3-x) - 3 = 0$. Porovnejte s přesným řešením $x = 2.822\dots$

12.5. Pomocí Taylorova polynomu spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}; \tag{12.1}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}; \tag{12.2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{x^3}; \tag{12.3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\sin x) - x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}; \tag{12.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x}{x}; \tag{12.5}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(\sqrt[6]{x^6+x^5} - \sqrt[6]{x^6-x^5}\right); \tag{12.6}$$

$$\lim_{x\to \infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right); \tag{12.7}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}; \tag{12.8}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - e^{-\frac{x^2}{6}}}{x^4}. \tag{12.9}$$

12.6. Určete, pro které $\alpha \in \mathbb{R}$ jsou následující veličiny srovnatelné s x^α pro $x \to x_0$. Poté spočtěte $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{x^\alpha}$.

$$f(x) = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x), \quad x_0 = 0+; \tag{12.10}$$

$$f(x) = (1+x)^x - 1, \quad x_0 = 0+; \tag{12.11}$$

$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right), \quad x_0 = \infty. \tag{12.12}$$

12.7. Nechť

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Potom

$$\lim_{x\to 0} (f(x))^{\frac{1}{x}} = e^k.$$

Dokažte!

KAPITOLA 6

Primitivní funkce

13. Snadné úpravy

13.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3\,dx, \qquad \int \sin(2x+7)\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx; \tag{13.1}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx; \tag{13.2}$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx; \tag{13.3}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}. \tag{13.4}$$

13.2. Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \tag{13.5}$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx; \tag{13.6}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}. \tag{13.7}$$

14. Integrace trigonometrických funkcí

14.1. Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx; \tag{14.1}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 + x\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}; \tag{14.2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x}; \tag{14.3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}. \tag{14.4}$$

15. Metoda integrování per partes

15.1. Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x \sin x \, dx, \qquad \int \arcsin x \, dx, \qquad \int \log x \, dx; \tag{15.1}$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) \, dx. \tag{15.2}$$

15.2. Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx, \qquad \int \arcsin x \, dx, \qquad \int \sin(\log x) \, dx. \tag{15.3}$$

16. Substituce

16.1. Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x} \, dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8 - 2} \, dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 + \cos(2x)}}; \tag{16.1}$$

$$\int \frac{x^2}{1+x} \, dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4} \, dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}} \, dx. \tag{16.2}$$

17. Lepení

17.1. Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x| \, dx, \qquad \int e^{-|x|} \, dx, \qquad \int \max\{x, x^2\} \, dx; \tag{17.1}$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}; \qquad \int |2x+1| \, dx; \qquad \int (|1+x| - |1-x|) \, dx. \tag{17.2}$$

18. Integrace racionálních funkcí

18.1. Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \, dx, \qquad \int \frac{x}{x^2 - x - 2} \, dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4}; \tag{18.1}$$

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{1 + x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} \, dx. \tag{18.2}$$

19. Integrace iracionálních funkcí

19.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x + 2}} \, dx, \qquad \int \sqrt{x^2 - 2x} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+3}}; \tag{19.1}$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} \, dx, \qquad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1 + x + x^2}} \, dx. \tag{19.2}$$

20. Eulerovy substituce

20.1. Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}, \qquad \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}; \tag{20.1}$$

$$\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1 - x^2}}. \tag{20.2}$$

KAPITOLA 7

Funkce více proměnných

21. Základní pojmy

21.1. Načrtněte grafy následujících funkcí:

$$f(x,y)=3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right),\qquad 0\le x\le 2, 0\le y\le 4-2x;$$
$$f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2};$$
$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2};$$
$$f(x,y)=x^2+y^2.$$

21.2. Načrtněte graf funkce (jedné proměnné)

$$F(t)=f(\cos t,\sin t),$$

kde

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (y\ge x);\\ 0 & (y<x).\end{cases}$$

21.3. Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

$$f(x,y)=x+\sqrt{y-1};\quad f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2};\quad f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}};$$
$$f(x,y)=\arccos\left(\frac{x}{x+y}\right);\quad f(x,y)=\log -x-y;\quad f(x,y)=\sqrt{\sin x^2+y^2}.$$

21.4. Určete a načrtněte vrstevnice následujících funkcí:

$$f(x,y)=x+y;\quad f(x,y)=x^2+y^2;\quad f(x,y)=x^2-y^2;$$
$$f(x,y)=(x+y)^2;\quad f(x,y)=\frac{y}{x};\quad f(x,y)=\frac{1}{x^2+2y^2};$$
$$f(x,y)=\sqrt{xy};\quad f(x,y)=e^{\frac{2x}{x^2+y^2}};\quad f(x,y)=x^y\ (x>0).$$

21.5. Spočtěte $f(1,\frac{y}{x})$, jestliže $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

21.6. Určete $f(t)$, jestliže $f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ $(x>0)$.

21.7. Nechť $z=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ a $z=x$ pro $y=1$. Určete funkce f a z.

21.8. Nechť $z=x+y+f(x-y)$ a $z=x^2$ pro $y=0$. Určete funkce f a z.

21.9. Určete $f(x,y)$, jestliže $f(x+y,\frac{x}{y})=x^2-y^2$.

Výsledky

Cvičení 21.1: trojúhelník, sféra, kužel, paraboloid.

Cvičení 21.2:

$$F(t)=\begin{cases}1 & [-\frac{3}{4}\pi+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi];\\ 0 & (\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{5\pi}{4}+2k\pi).\end{cases}$$

Cvičení 21.3: $(-\infty,\infty)\times[1,\infty)$; kruh $\{x^2+y^2\le 1\}$; doplněk téhož kruhu v $\mathbb{R}^2$; plocha ohraničená dvěma tupými úhly vymezenými přímkami $y=0$ a $y=2x$ bez počátku; polorovina $\{x+y<0\}$; sjednocení mezikruží $\{2k\pi\le x^2+y^2\le(2k+1)\pi\}$.

Cvičení 21.4: rovnoběžné přímky, soustředné kružnice, hyperboly se společnou asymptotou $y=\pm x$, rovnoběžné přímky, svazek paprsků vycházejících z počátku bez počátečního bodu; soustředné podobné elipsy, hyperboly ležící v kvadrantech I a III s asymptotami blížícími se k souřadným osám; křivky $y=\frac{C}{\log x}$.

Cvičení 21.5: $f(1,\frac{y}{x})=f(x,y)$.

Cvičení 21.6: $f(t)=\sqrt{1+t^2}$.

Cvičení 21.7: $f(t)=2t+t^2$, $z(x,y)=x-1+\sqrt{y}$.

Cvičení 21.8: $f(t)=t^2-t^2$, $z(x,y)=2y+(x-y)^2$.

Cvičení 21.9: $f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}$.

22. Limita a spojitost

22.1. Nechť

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}.$$

Dokažte, že

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=1,\qquad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=-1,$$

a tedy

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}f(x,y)$$

neexistuje.

22.2. Nechť

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}.$$

Dokažte, že sice

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)=\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)=0,$$

ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}f(x,y)$$

neexistuje.

22.3. Nechť

$$f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right).$$

Dokažte, že sice ani jedna z limit

$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}f(x,y)\right)\qquad \lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0}f(x,y)\right)$$

neexistuje, ale přesto

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]}f(x,y)$$

existuje. Čemu se tato limita rovná?

22.4. Spočtěte

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \quad \text{a} \quad \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right),$$

kde

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}, \qquad a=b=\infty;$$
$$f(x,y)=\frac{x^y}{1+x^y}, \qquad a=\infty,\ b=0+;$$
$$f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi x}{2x+y}\right), \qquad a=b=\infty;$$
$$f(x,y)=\frac{1}{xy}\operatorname{tg}\left(\frac{xy}{1+xy}\right), \qquad a=0,\ b=\infty;$$
$$f(x,y)=\log_x(x+y), \qquad a=1,\ b=0.$$

22.5. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{[x,y]\to[\infty,\infty]} = \frac{x+y}{x^2-xy+y^2};$$
$$\lim_{[x,y]\to[0,a]} = \frac{\sin(xy)}{x};$$
$$\lim_{[x,y]\to[0,a]} = (x^2+y^2)^{x^2y^2};$$
$$\lim_{[x,y]\to[\infty,a]} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}};$$
$$\lim_{[x,y]\to[1,0]} = \frac{\log(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

22.6. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2} & (x^2+y^2\neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0),\end{cases}$$

je spojitá jako funkce proměnné x i proměnné y, ale není spojitá jako funkce dvou proměnných.

22.7. Dokažte, že funkce

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x^2+y^2\neq 0);\\ 0 & (x^2+y^2=0),\end{cases}$$

je spojitá v bodě $[0,0]$ po všech přímkách $x=t\cos\alpha$, $y=t\sin\alpha$, $t\in(0,\infty)$, $\alpha\in[0,2\pi]$, ale přesto není v bodě $[0,0]$ spojitá.

22.8. Zjistěte, zda je funkce

$$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$$

spojitá na svém definičním oboru.

22.9. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2-x^2y^3}{x^2+y^2}$$

dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

22.10. Zjistěte, zda lze funkci

$$f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x-y}$$

dodefinovat na přímce $y=x$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

22.11. Zjistěte, zda lze funkci
$$f(x,y)=\frac{\sin(x)\sin^3(y)}{1-\cos(x^2+y^2)}$$
dodefinovat v bodě $[0,0]$ tak, aby byla spojitá na $\mathbb{R}^2$.

22.12. Najděte podmínky na konstanty a,b,c, aby existovala limita
$$\lim_{[x,y]\to[0,a]}=\frac{xy}{ax^2+bxy+cy^2}.$$

Výsledky

Cvičení 22.3: 0

Cvičení 22.4: $0,1$; $\frac{1}{2},1$; $0,1$; $0,1$; $1,\infty$.

Cvičení 22.5: 0; a; 1; e; $\log 2$.

Cvičení 22.8: ano

Cvičení 22.9: ano, $f(0,0)=1$.

Cvičení 22.10: ano, $f(x,x)=3x^2$.

23. Derivace a totální diferenciál

23.1. Dokažte, že pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ a pro libovolné pevné $a\in\mathbb{R}$ platí
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,a)=\frac{d}{dx}f(x,a)$$

23.2. Spočtěte
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1),\quad \text{jestliže}\quad f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

23.3. Spočtěte
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0),\quad \text{jestliže}\quad f(x,y)=\sqrt[3]{xy}.$$
Má funkce $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

23.4. Má funkce
$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$$
v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

23.5. Má funkce
$$f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$
v bodě $[0,0]$ totální diferenciál?

23.6. Spočtěte
$$\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
pro funkce
$$f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2;\quad f(x,y)=xy+\frac{x}{y};\quad f(x,y)=\frac{x}{y^2};$$
$$f(x,y)=\frac{\cos x^2}{y};\quad f(x,y)=x^y;\quad f(x,y)=\log\left(x+y^2\right);\quad f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x};$$
$$f(x,y,z)=\left(\frac{x}{y}\right)^z;\quad f(x,y,z)=x^{\left(\frac{y}{z}\right)};\quad f(x,y,z)=x^{(y^z)}.$$

23.7. Nechť

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Dokažte, že

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

23.8. Nechť

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

Dokažte, že neexistuje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

23.9. Spočtěte první a druhý diferenciál následujících funckí:

$$f(x,y)=x^m y^n,\quad f(x,y)=\frac{x}{y},\quad f(x,y)=\log(\sqrt{x^2+y^2};$$
$$f(x,y)=e^{xy},\quad f(x,y)=xy+yz+zx,\quad f(x,y)=\frac{z}{x^2+y^2}.$$

23.10. Odhadněte chybu následujících veličin v závislosti na chybě jednotlivých promněnných:

$$(1+x)^m(1+x)^n,\quad \log(1+x)\log(1+y),\quad \operatorname{arctg}\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

23.11. Objem válce s podstavou o poloměru r a výšce h je dán vzorcem $V=\pi r^2 h$. Je-li výška $v=5$ cm změřena s přesností na 0.005 cm a poloměr podstavy $r=3$ cm je změřen s přesností na 0.01 cm, určete, s jakou největší možnou chybou je určen objem válce V.

23.12. Plocha trojúhelníka ABC je dána vzorcem

$$P=\frac{bc\sin\alpha}{2}$$

Víme-li, že veličiny b,c,α byly naměřeny s přesností na 1% a úhel α byl změřen na $\pi/4$, dokažte, že výsledná plocha je určena s maximální chybou menší než 2.8%.

Výsledky

Cvičení 23.2: 1.

Cvičení 23.3: 0, 0, ne.

Cvičení 23.4: ne.

Cvičení 23.5: ano.

Cvičení 23.10: $1+mx+ny$, xy, $x+y$.

Cvičení 23.11: $0,345\pi$.

24. Řetízkové pravidlo

24.1. Spočtětě

$$\frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial \theta},$$

kde

$$T(x,y) = x^3 - xy + y^3$$

a

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

24.2. Spočtětě

$$\frac{dH}{dt},$$

kde

$$H(t) = \sin 3x - y$$

a

$$x = 2t^2 - 3, \quad y = \frac{t^2}{2} - 5t + 1.$$

24.3. Poloměr podstavy r rotačního kužele roste o 2 cm za sekundu a výška h roste o 3 cm za sekundu. Spočtětě míru růstu objemu V v okamžiku, kdy $r = 5$ cm a $h = 15$ cm.

24.4. Lokální atmosférická teplota T závisí na prostorových souřadnicích x, y, z daného bodu a na čase t podle vzorce

$$T(x,y,z,t) = \frac{xy}{1+z}(1+t).$$

Teploměr je připevněn k meteorologickému balónu, který se pohybuje atmosférou po křivce dané parametrickými rovnicemi

$$x = t,\ y = 2t,\ z = t - t^2.$$

Určete míru změny teploty v čase $t = 1$.

Výsledky

Cvičení 24.1:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial r} &= 3r^2\left(\cos^3\theta + \sin^3\theta\right) - 2r\cos\theta\sin\theta,\\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 3r^2(\sin\theta - \cos\theta)\cos\theta\sin\theta + r^2\left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right).\end{aligned}$$

Cvičení 24.2:

$$\frac{dH}{dt} = (11t+5)\cos\left(\tfrac{11}{2}t^2 + 5t - 10\right).$$

Cvičení 24.3:

$$\frac{dV}{dt} = 125\pi\ \mathrm{cm}^3\mathrm{s}^{-1}.$$

Cvičení 24.4: teplota roste o 14 stupňů za hodinu.

25. Implicitní funkce

25.1. Vypočítejte derivaci $y'(x)$ implicitní funkce $y = y(x)$ definované následujícími předpisy:

$$x^2 + 2xy - y^2 = a^2, \qquad \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right);$$

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1);$$

$$x^y = y^x \quad (x \neq y), \qquad y = 2x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right).$$

25.2. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial y}$ implicitní funkce $z = z(x, y)$ definované předpisem

$$z^2 + xy^3 = \frac{xz}{y}.$$

25.3. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial x}{\partial y}$ implicitní funkce $x = x(y, z)$ definované předpisem

$$xy^3 = y - z.$$

25.4. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial y}{\partial z}$ implicitní funkce $y = y(x, z)$ definované předpisem

$$e^{yz} - x^2 z \log y = \pi.$$

25.5. Vypočítejte parciální derivaci $\frac{\partial z}{\partial x}$ implicitní funkce $z = z(x, y)$ definované předpisem

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0,$$

kde F je diferencovatelná funkce dvou proměnných.

Výsledky

Cvičení 25.1:

$$\frac{x+y}{y-x}, \quad \frac{x+y}{x-y}, \quad \frac{1}{1-\varepsilon\cos y}, \quad \frac{y^2(1-\log x)}{x^2(1-\log y)}, \quad \frac{y}{x}.$$

Cvičení 25.2:

$$\frac{3xy^4 + xz}{xy - 2zy^2}.$$

Cvičení 25.3:

$$\frac{1 - 3xy^2}{y^3}.$$

Cvičení 25.4:

$$\frac{x^2 y \log y - y^2 e^{yz}}{yze^{yz} - x^2 z}.$$

Cvičení 25.5:

$$\frac{2x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right) + z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right)}{2z\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right) - x\frac{\partial F}{\partial x}\left(x^2 - z^2, y^2 + xz\right)}.$$

KAPITOLA 8

Metrické prostory II

26. Úplné metrické prostory

26.1. Zopakujte si důležité definice z teorie metrických prostorů: metrika, metrický prostor, koule, otevřená množina, uzavřená množina, vnitřek, uzávěr, konvergentní posloupnost, limita posloupnosti, kompaktní množina, omezená množina, spojité zobrazení.

26.2. *Průměrem* neprázdné množiny A v metrickém prostoru (P, ϱ) nazveme číslo

$$\operatorname{diam} A = \sup \{\varrho(x, y);\ x, y \in A\}.$$

Určete průměr následujících množin: $[0, 1]$, $(0, 2)$, $\{3\} \cup [-1, 0)$, jednotková koule v $\mathbb{R}^n$, jednotková krychle v $\mathbb{R}^n$, $(0, \infty)$, interval $(1, 5)$ s diskrétní metrikou.

26.3. Charakterizujte všechny neprázdné podmnožiny metrického prostoru (P, ϱ), které mají nulový průměr.

26.4. Dokažte

$$\operatorname{diam} A = \operatorname{diam} \bar{A}.$$

26.5. Nechť (P, ϱ) je metrický prostor a nechť $\{x_n\} \subset P$ je posloupnost. Řekneme, že $\{x_n\}$ je *cauchyovská*, jestliže splňuje Bolzanovu–Cauchyovu podmínku, tedy

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n \geq n_0 : \quad \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

V prostoru reálných čísel s eukleidovskou metrikou platí, že posloupnost je konvergentní právě když je cauchyovská. Dokažte na příkladu, že v obecném metrickém prostoru toto tvrzení neplatí.

26.6. Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá *úplný*, jestliže každá cauchyovská posloupnost $\{x_n\} \subset P$ je konvergentní.

Dokažte, že
(i) prostor (a, b) není úplný;
(ii) prostor $[a, b]$ je úplný;
(iii) prostor $C([0, 1])$ s metrikou

$$\varrho(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

je úplný.

26.7. Charakterizujte všechny cauchyovské posloupnosti v diskrétním prostoru. Je diskrétní prostor úplný?

26.8. Dokažte následující Cantorovu větu: Metrický prostor (P, ϱ) je úplný právě tehdy, když má následující vlastnost: pro libovolnou posloupnost uzavřených množin

$$P \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$$

splňující

$$\operatorname{diam} A_n \to 0$$

je množina $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ jednobodová.

Návod: K důkazu nutnosti vezměte pro každé n libovolný bod $x_n \in A_n$ a dokažte, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská a tedy konvergentní a že její limita je zároveň jediným bodem v průniku množin A_n.

K důkazu postačitelnosti definujte pro danou cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ množiny

$$A_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}$$

a dokažte, že mají jednobodový průnik, který je zároveň limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

26.9. Ukažte na příkladu, že odstraníme-li z Cantorovy věty předpoklad $\operatorname{diam} A_n \to 0$, pak se může stát, že průnik množin A_n bude prázdný. Shoduje se tento fakt s vaší intuitivní představou?

26.10. Nechť $P = \mathbb{R}$ a

$$\varrho(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{je-li } x \neq 0, y = 0; \\ \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x = 0, y \neq 0; \\ 0 & \text{je-li } x = y; \\ \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} & \text{je-li } x \neq 0, y \neq 0, x \neq y. \end{cases}$$

Určete, zda
(i) (P,ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P,ϱ) je úplný;
(iii) (P,ϱ) je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P,ϱ).

27. Banachova věta o kontrakci

27.1. Zobrazení $T : P \to P$ se nazývá *kontrakcí*, jestliže existuje $\gamma \in [0,1)$ tak, že

$$\varrho(Tx, Ty) \le \gamma \varrho(x,y) \quad \text{pro každé } x, y \in P.$$

Dokažte následující tvrzení: Nechť T je kontrakce na P a $x_1 \in P$ je libovolný bod. Definujeme posloupnost $\{x_n\}$ předpisem

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Potom $\{x_n\}$ je cauchyovská.

27.2. Dokažte, že důsledkem tvrzení z příkladu 27.1 je následující *Banachova věta o kontrakci*:
Nechť (P,ϱ) je úplný metrický prostor a nechť $T : P \to P$ je kontrakce. Potom T má na P právě jeden pevný bod, to jest existuje právě jedno $x \in P$ takové, že $Tx = x$.

27.3. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Určete, zda
(i) (P,ϱ) je metrický prostor;
(ii) (P,ϱ) je úplný;
(iii) (P,ϱ) je kompaktní.
Určete $\operatorname{diam} P$. Najděte všechny otevřené množiny a všechny kompaktní množiny prostoru (P,ϱ). Jsou jednobodové množiny otevřené?

27.4. Nechť $P = \mathbb{N}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n+1.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Lze odtud usoudit, že T není kontrakce na P? Jestliže ne, dokažte to nějak jinak.

27.5. Nechť $P = \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\varrho(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Definujeme zobrazení

$$T : n \to n^2.$$

Zobrazení T zřejmě nemá pevný bod. Dokažte, že přesto je T kontrakce na P. Jak je to možné?

27.6. Nechť (P,ϱ) je metrický prostor a nechť $T : P \to P$ splňuje

$$\varrho(Tx, Ty) < \varrho(x,y) \quad \text{pro každé } x, y \in P,\ x \neq y.$$

Uvědomte si, že T nemusí být kontrakce na P! Zobrazení mající tuto vlastnost nazýváme *neexpanzívní*. Najděte příklad metrického prostoru a neexpanzívního zobrazení, které není kontrakcí.

27.7. Platí následující modifikace Banachovy věty (povšimněte si, čím je vyváženo zeslabení předpokladu na zobrazení T):

Nechť (P, ϱ) je ***kompaktní*** metrický prostor a nechť $T : P \to P$ je neexpanzívní. Potom T má na P právě jeden pevný bod. Dokažte!

Návod: Studujte vlastnosti funkce $f : P \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$f(x) = \varrho(x, Tx).$$

28. Souvislé prostory

28.1. V prostoru $C([0,1])$ se supremovou metrikou definujeme pro dvě dané funkce $g, h \in C([0,1])$ ***úsečku***:

$$f : [0,1] \to C([0,1]), \qquad f(a) = g + a(h - g).$$

Dokažte, že: (i) úsečka je oblouk;

(ii) f je stejnoměrně spojitá na $[0,1]$;

(iii) $C([0,1])$ je obloukově souvislý prostor.

Všimněte se, že stačí dokázat jen jedno z tvrzení (i)–(iii). Které?

28.2. Zkoumejte, jaké vlastnosti musíme vyžadovat od metrického prostoru, aby v něm bylo možno nějakým rozumným způsobem zadefinovat úsečku a aby platila analogie tvrzení z předcházejícího příkladu. Pro jakou třídu metrických prostorů takto automaticky zajistíme obloukovou souvislost?

28.3. Ukažte na příkladu, že uzávěr obloukově souvislé množiny nemusí být obloukově souvislá množina.

Návod: Graf funkce $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (0,1)$.

28.4. Ukažte příklad množin A, B takových, že $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$, A je obloukově souvislá množina, B není obloukově souvislá množina.

Návod: V $\mathbb{R}^2$ vezměte všechny úsečky délky 1 vycházející z počátku a mající směrnice $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. To je množina A. Množinu B vytvořte tak, že k A přidáte ještě úsečku $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\, x \in [\frac{1}{2}, 1], y = 0\}$. Je A obloukově souvislá? Co je $\overline{A}$? Platí $A \subsetneq B \subsetneq \overline{A}$? Je B obloukově souvislá?

KAPITOLA 9

Obyčejné diferenciální rovnice

20. Základní rovnice, separace proměnných

20.1. Uhodněte nějaká řešení následujících diferenciálních rovnic. Najdete všechna řešení?

$$y' = 0; \quad y' = 5; \quad y' = -3x; \quad y' = \sin(2x); \quad y' = -4y.$$

20.2. Uhodněte partikulární řešení diferenciálních rovnic, která splňují příslušnou okrajovou podmínku:

$$y' = -3x, \ y(2) = 4; \quad y' = -4y, \ y(0) = 7.$$

20.3. Zkuste najít některé obecné řešení diferenciální rovnice

$$y'' + \lambda^2 y = 0.$$

Nyní najděte partikulární řešení, které splňuje okrajové podmínky

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$

20.4. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 1 + y^2; \quad y' = \sin x \left(y^2 + 2y + 1\right); \quad y' = \begin{cases} y \log^2(y), & y > 0, \\ 0 & y = 0. \end{cases}$$

Načrtněte integrální křivky řešení všech uvedených rovnic!

20.5. Jestliže se potkají dvě řešení rovnice

$$y' = f(x, y),$$

kde f je spojitá funkce dvou proměnných, pak na sebe tato dvě řešení navazují hladce. Dokažte!

Rovnici

$$y'x = y \log y$$

řeší například funkce $y \equiv 1$ a $y = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Tato dvě řešení se potkávají v bodě $[0, 1]$, ale nenavazují na sebe hladce. Proč to není ve sporu se shora uvedeným tvrzením?

20.6. Najděte maximální partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y' \sin x = y \log y,$$

procházející bodem $[\frac{\pi}{2}, e]$ a načrtněte jeho graf. Jaký je maximální interval, na který lze toto řešení rozšířit?

20.7. Najděte všechna maximální řešení diferenciálních rovnic

$$y' = 10^{x+y}; \quad y' - xy' = b(1 + x^2 y'), \qquad y(1) = 1.$$

Načrtněte integrální křivky řešení!

20.8. Primitivní *populační model* popisuje vývoj určité populace tak, že růst počtu jedinců P v čase t je přímo úměrný P, takže podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP,$$

kde $k > 0$ je konstanta úměrnosti, závislá na typu populace, kterou studujeme. Dokažte, že pak

$$P(t) = Ae^{kt},$$

kde A je nějaká kladná konstanta daná počátečním stavem populace. Promyslete si sestavení a vyřešení obecné rovnice a pak spočítejte následující příklad.

Bakteriální kultura roste v čase t úměrně počtu jednotlivých bakterií $P = P(t)$. Na začátku je 500 bakterií, po jednom dni máme 800 bakterií. Bude jich po dalších 12 hodinách více než 1000? Vedla by lineární aproximace ke stejnému závěru?

20.9. Podstatně lepší populační model než ten, který byl popsán v předcházejícím příkladu, bere v potaz tzv. *maximální kapacitu životního prostředí*. Ta je dána číslem N, což je nejvyšší možný počet členů dané populace, který se ještě v daném životním prostředí uživí. Ověřte si, že podle tohoto modelu je vývoj populace řízen diferenciální rovnicí

$$\frac{dP}{dt} = kP(N-P).$$

Dokažte, že vývoj stavu populace je pak dán funkcí

$$P(t) = \frac{kNe^{Nt}}{1+ke^{Nt}},$$

kde k je konstanta úměrnosti. Vyřešte si obecnou rovnici a načrtněte její integrální křivky. Porovnejte s příkladem 20.8! Pak spočítejte následující příklad.

Na ostrov, který skýtá pastvu pro nejvýše 120 králíků, dorazilo 30 králíků. Po prvním roce jich zde žije již 80. Bude jich za další rok více než 100?

20.10. Králík roste podle tzv. allometrického zákona

$$\frac{d}{dv} = k\frac{}{v},$$

kde , v označují šířku a výšku králíka a k je konstanta úměrnosti. Na začátku má králík šířku 5 cm a výšku 5 cm. Po nějaké době má králík 10 cm výšky a $5\sqrt{2}$ cm šířky. Králík má k dispozici noru o šířce 12 cm a výšce 24 cm. Určete, zda mu bude dřív úzká nebo nízká.

20.11. Brouk Pytlík nemá rád teplotu nižší než 60 mravenčích stupňů. V 8 hodin ráno mravenci zatopí v peci, na níž Pytlík leží, na 110 stupňů, a odejdou do práce. Ve 13 hodin je teplota v místnosti 80 stupňů. Místnost vychládá rychlostí úměrnou rozdílu okamžité teploty v místnosti a venkovní teploty, která je stabilně rovna 20 stupňům. Vydrží Pytlík do 18 hodin, kdy se mravenci vrátí z práce a zatopí?

20.12. Při pádu s padákem je směrem dolů působící gravitační síla rovna $G = mg$, kde m je hmotnost parašutisty a g je konstantní gravitační zrychlení. Směrem vzhůru působící síla F způsobená odporem padáku je úměrná kvadrátu okamžité rychlosti, tedy $F = kv^2$, kde k je materiálová konstanta vyjadřující kvalitu padáku. Vývoj okamžité rychlosti směrem dolů $v = v(t)$ v čase t je tedy řízen diferenciální rovnicí

$$mg - kv^2 = m\frac{dv}{dt}.$$

Dokažte, že bez ohledu na počáteční rychlost $v(0)$ se bude rychlost po dost dlouhé době (za předpokladu, že parašutista skáče z dostatečné výšky) blížit konstantní rychlosti $v = \sqrt{\frac{mg}{k}}$.

20.13. Popište křivku v rovině, která prochází bodem $[2,3]$ s následující vlastností: úsečka libovolné její tečny, vymezená průsečíky této tečny se souřadnými osami, se půlí v bodě dotyku.

21. Homogenní rovnice

21.1. Má-li diferenciální rovnice tvar $y' = f(\frac{y}{x})$, lze ji převést substitucí $z = \frac{y}{x}$ na tvar

$$z'(x)x + z(x) = f(z),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = y + x\sin^2\left(\frac{y}{x}\right), \quad xy' = \frac{y^2+xy}{x}, \quad y' = \frac{y}{x} - 1, \quad xy' = y\log\frac{x}{y},\ x,y>0.$$

21.2. Řešte diferenciální rovnice

$$xy' = xe^{y/x} + y, \quad \left(x^2 + y^2\right) y' = 2xy.$$

21.3. Řešte diferenciální rovnice

$$y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, \qquad y' = \frac{x+y}{x-y}, \qquad y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

22. Exaktní rovnice

Má-li diferenciální rovnice tvar

$$h(x,y)y' + f(x,y) = 0 \tag{22.1}$$

a existuje-li funkce dvou proměnných $u(x,y)$ taková, že

$$\frac{\partial u}{\partial y} = h(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = f(x,y), \tag{22.2}$$

pak se taková rovnice nazývá *exaktní*.

Dosud jsme chápali u jako funkci dvou proměnných. Protože ale $y = y(x)$, můžeme chápat $u = u(x, y(x))$ jako funkci jedné proměnné (x). Pak ji derivujeme neparciálně,tj. $\frac{du}{dx}$. Povšimněme si, že exaktní rovnici (22.1) lze přepsat ve tvaru $\frac{du}{dx} = 0$ a že všechna řešení této rovnice jsou implicitně popsána pomocí křivek tvaru $u(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Jak rozpoznat, zda je daná rovnice exaktní? Jsou-li funkce h a f spojité, pak k tomu, aby rovnice (22.1) byla exaktní, musí platit

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Tento vztah lze považovat za test exaktnosti rovnice. Navíc jej lze snadno ověřit.

Jestliže je rovnice exaktní, jak najít funkci u? Můžeme se například pokusit tuto funkci uhodnout. Pokud to nejde, můžeme funkci u získat integrací vztahů (22.2).

22.1. Řešte diferenciální rovnice

$$y'\left(\log(\sin x) - 3y^2\right) + y \operatorname{cotg} x + 4x = 0, \quad y' + \frac{y}{2x} = \frac{1}{y}; \tag{22.3}$$

$$y'\left(3x^2y^2 + e^y\right) + 2xy^3 + 2 = 0; \tag{22.4}$$

$$y'\left(x^2 \sin(xy) - 2y\right) + \cos(xy) - xy \sin(xy) = 0. \tag{22.5}$$

Jestliže rovnice není exaktní, můžeme ji někdy převést na exaktní tvar pomocí integračního faktoru. Rovnici (22.1) vynásobíme zatím neznámou funkcí φ. Aby byla tato nová rovnice exaktní, musí splnit test, tj. musí platit

$$\frac{\partial(h\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial y},$$

tedy

$$\varphi\frac{\partial h}{\partial x} + h\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \varphi\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{22.6}$$

což je ale parciální diferenciální rovnice pro φ. To je úloha těžší než původní rovnice. Z tohoto důvodu většinou hledáme funkci φ závislou jen na jedné ze dvou proměnných. Pokud např. $\varphi = \varphi(x)$, pak je $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$ a (22.6) získá tvar

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial x}\right),$$

a to je již snadno řešitelná rovnice pro φ se separovanými proměnnými.

22.2. Uvažujte diferenciální rovnici

$$y'\left(3xy = x^2\right) + y^2 - 6xy = 0.$$

Přesvědčte se, že rovnice není exaktní. Hledejte integrační faktor ve tvaru $\varphi = \varphi(y)$ a rovnici vyřešte.

23. Lineární rovnice 1. řádu

23.1. Diferenciální rovnice tvaru

$$y' + p(x)y = q(x),$$

kde p, q jsou funkce jedné proměnné, se nazývá lineární rovnicí 1. řádu.

Řešte následující diferenciální rovnice pomocí integračního faktoru.

$$y' + xy = x; \quad y' - 4y = x$$

$$xy' + y = x^2, \quad y(2) = \frac{1}{3};$$

$$y' + 3y = x, \quad y(0) = 1;$$

$$y' - \frac{1-2y}{x} = 4x + e^x, \quad y(1) = 0;$$

$$xy' + y - e^x = 0, \quad y(a) = b$$

23.2. Rovnice tvaru

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x)^\alpha = b(x), \quad \alpha \neq 0, 1,$$

se nazývá *Bernoulliova*. Substitucí $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ převedeme Bernoulliovu rovnici na lineární. Tu vyřešíme a dopočítáme y ze substituce.

Řešte následující Bernoulliovy diferenciální rovnice:

$$xy' + y = y^2 \log x; \quad y' + 2xy = 2x^3y^3.$$

24. Lineární rovnice vyššího řádu

24.1. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte fundamentální systém řešení a uhodněte alespoň jedno partikulární řešení.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{3x};$$

$$y''' - y'' + y' - y = \sin x;$$

$$y'' - y = e^x \left(x^2 + 1\right).$$

Návod: Partikulární řešení hledejte po řadě ve tvaru $y = ae^{3x}$, $y = a\sin(x) + b\cos(x)$ a $y = ae^x x^2 + be^x x + ce^x$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c.

24.2. U následujících diferenciálních rovnic nalezněte reálný fundamentální systém řešení a uhodněte partikulární řešení.

$$y'' + 4y = \cos(nx); \quad y''' - y = x^3 - 1.$$

Návod: Partikulární řešení hledejte ve tvaru $y = a\sin(nx) + b\cos(nx)$, respektive ve tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dosaďte do rovnice a dopočítejte reálné koeficienty a, b, c, d.

24.3. Zrekonstruujte nehomogenní lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty, jestliže víte, že její fundamentální systém řešení je

$$[e^x, xe^x]; \quad \left[x, x^2\right].$$

24.4. Metodou snižování řádu vyřešte rovnici

$$y''' = \frac{1}{4\sqrt{y'}}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = y''(0) = 1.$$

Návod: Položte $z = y'$.

24.5. Nalezněte reálný fundamentální systém řešení následujících lineárních homogenních diferenciálních rovnic:

$$
\begin{aligned}
y^{(4)} + y''' - 3y'' - 5y' - 2y &= 0;\\
y^{(4)} + 2y''' + y'' &= 0;\\
y'' + 4y' + 13y &= 0;\\
y'' + y' - 2y &= 0.
\end{aligned}
$$

25. Systémy lineárních rovnic 1. řádu

25.1. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x - y - z\\
y' &= 2x - y - 2z\\
z' &= 2z - x + y.
\end{aligned}
$$

25.2. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= 3x - 2y - z\\
y' &= 3x - 4y - 3z\\
z' &= 2x - 4y.
\end{aligned}
$$

25.3. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= 2x + 2z - y\\
y' &= x + 2z\\
z' &= y - x - z.
\end{aligned}
$$

25.4. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= x - 2y - z\\
y' &= y - x + z\\
z' &= x - y.
\end{aligned}
$$

25.5. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= 4x + 5y - 2z\\
y' &= -2x - 2y + z\\
z' &= -x - y + z.
\end{aligned}
$$

25.6. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$
\begin{aligned}
x' &= x - y + z\\
y' &= x + y - z\\
z' &= 2z - y.
\end{aligned}
$$

25.7. Nechť x, y, z jsou diferencovatelné funkce proměnné $t \in \mathbb{R}$. Řešte systém diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' &= 2x + y \\ y' &= 2y + 4z \\ z' &= x - z. \end{aligned}$$

KAPITOLA 10

Lebesgueův integrál v $\mathbb{R}^n$

35. Konvergence Lebesgueova integrálu

35.1. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Lebesgueovy integrály:

$$\int_0^\infty x^{s-1}(\log x)^k e^{-x}\,dx, \quad k \in \mathbb{Z}; \tag{35.1}$$

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx; \tag{35.2}$$

$$\int_0^\infty x^p e^{-\sqrt{x}}\,dx; \tag{35.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{|\log x|^\alpha}{1+x^k}\,dx; \tag{35.4}$$

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^a\,dx; \tag{35.5}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx; \tag{35.6}$$

$$\int_0^\infty \frac{1-\cos ax}{x^p}\,dx; \tag{35.7}$$

$$\int_0^\pi \log\sin ax\,dx; \tag{35.8}$$

$$\int_0^1 x^{ax}\,dx; \tag{35.9}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{1+x}}\,dx; \tag{35.10}$$

$$\int_0^1 \frac{|\log x|^p}{\sqrt{1-x}}\,dx; \tag{35.11}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}\,\log(1+e^x)}\,dx; \tag{35.12}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^p}{x}\,dx; \tag{35.13}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}}\,dx. \tag{35.14}$$

35.2. Vyšetřete, pro které hodnoty příslušných parametrů konvergují následující Lebesgueovy integrály:

$$\int_0^\infty (\pi - 2\operatorname{arctg} x)^\alpha\,dx; \tag{35.15}$$

$$\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^q(1/x)}\,dx. \tag{35.16}$$

Výsledky

Cvičení 35.1:

$$
\begin{aligned}
(35.1):&\quad s>0,\quad k>-1;\\
(35.2):&\quad p,q>0;\\
(35.3):&\quad p>-1;\\
(35.4):&\quad \alpha>-1,\quad k>1;\\
(35.5):&\quad a\in(-1,1);\\
(35.6):&\quad 0<p+1<q;\\
(35.7):&\quad a\in\mathbb{R}\quad 1<p<3;\\
(35.8):&\quad 0<a\le 1;\\
(35.9):&\quad a\in\mathbb{R};\\
(35.10):&\quad a\in(-1,-\frac{1}{2});\\
(35.11):&\quad p>-\frac{1}{2};\\
(35.12):&\quad \text{konverguje;}\\
(35.13):&\quad \text{nekonverguje pro žádné reálné } p;\\
(35.14):&\quad \text{nekonverguje.}
\end{aligned}
$$

Cvičení 35.2:

$$
\begin{aligned}
(35.15):&\quad \alpha<-1;\\
(35.16):&\quad q<\frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

36. Záměna řady a integrálu

36.1. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,dx; \tag{36.1}$$

$$\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,dx; \tag{36.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,dx; \tag{36.3}$$

$$\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\,dx; \tag{36.4}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx; \tag{36.5}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,dx; \tag{36.6}$$

$$\int_0^1 \frac{x^p\log x}{1-x}\,dx; \tag{36.7}$$

$$\int_0^1 \frac{x^p\log x}{1+x}\,dx; \tag{36.8}$$

$$\int_0^1 \frac{x^p\log x}{1+x^2}\,dx; \tag{36.9}$$

$$\int_0^1 \log x\;\log(1-x)\,dx; \tag{36.10}$$

$$\int_0^1 \log x\;\log(1+x)\,dx. \tag{36.11}$$

Výsledky

Cvičení 36.1:

$$(36.1):\quad \frac{\pi^2}{12}$$

$$(36.2):\quad -\frac{\pi^2}{6};$$

$$(36.3):\quad \frac{\pi^2}{6};$$

$$(36.4):\quad \frac{\pi^2}{12};$$

$$(36.5):\quad \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\left(\frac{1}{p+kq}-\frac{1}{p-(k+1)q}\right),\quad 0<p<q;$$

$$(36.6):\quad \sum_{k=0}^\infty (-1)^k\frac{k!}{(2k)!};$$

$$(36.7):\quad -\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{1}{p+k+1}\right)^2,\quad p>-1;$$

$$(36.8): \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{p+k+1}\right)^2, \quad p>-1;$$

$$(36.9): \quad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k+p+1};$$

$$(36.10): \quad 2-\frac{\pi^2}{6};$$

$$(36.11): \quad \frac{\pi^2}{12}-2\log 2$$

37. Záměna limity a integrálu

37.1. V následujících příkladech vyšetřete, zda lze zaměnit limitu a integrál, a pokud ano, spočtěte limitu.

(37.1) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{n^p x}{1+n^2x^2}\,dx;$$

(37.2) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,dx;$$

(37.3) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n\ x^{1/n}}\,dx;$$

(37.4) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} \frac{\log(x+n)}{n}\,e^{-x}\ \cos x\,dx;$$

(37.5) $$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-x^n}\,dx.$$

38. Integrál závislý na parametru

38.1. Vyšetřete definiční obor funkce F a její spojitost, najděte limity v krajních bodech (nebo se o to aspoň pokuste), vyjádřete derivaci funkce podle věty o derivování integrálů závislých na parametru.

$$F(a) = \int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-x}\, dx; \tag{38.1}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\, dx; \tag{38.2}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{x}{1+x^a}\, dx; \tag{38.3}$$

$$F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\, \cos x\, dx; \tag{38.4}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+x^2}\, dx; \tag{38.5}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+ax^2}\, dx; \tag{38.6}$$

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1-x^a}{\log x}\, dx; \tag{38.7}$$

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{x}{e^{ax}-1}\, dx; \tag{38.8}$$

$$F(a) = \int_0^\pi \frac{\log(1+a\sin x)}{x}\, dx; \tag{38.9}$$

$$F(a) = \int_0^1 \frac{\arcsin ax}{x}\, dx; \tag{38.10}$$

$$F(a) = \int_0^\pi \operatorname{tg} ax\, dx. \tag{38.11}$$

38.2. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů konvergují následující Lebesgueovy integrály a spočtěte jejich hodnoty pomocí věty o derivování integrálů závislých na parametru.

$$J(a) = \int_0^{\pi} \frac{\log(1 + a\cos x)}{\cos x}\, dx; \tag{38.12}$$

$$F(a,k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} \frac{\sin(ax)}{x}\, dx; \tag{38.13}$$

$$K(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\log(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2}\, dx; \tag{38.14}$$

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\sin x)}{\sin x}\, dx; \tag{38.15}$$

$$F(p,q) = \int_0^1 \frac{(1 - x^p)(1 - x^q)}{\log x}\, dx; \tag{38.16}$$

$$F(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) - \operatorname{arctg}(bx)}{x}\, dx; \tag{38.17}$$

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{x}{e^{ax} - 1}\, dx; \tag{38.18}$$

$$F(a) = \int_0^1 \frac{1 - x^a}{\log x}\, dx. \tag{38.19}$$

Výsledky

Cvičení 38.2:

(38.12) : $J(a) = \pi \arcsin a, \quad a \in [-1, 1];$

(38.13) : $F(a,k) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R},\ k \in (0, \infty);$

(38.14) : $K(a,b) = \frac{\pi}{|b|} \log\left(|a| + |b|\right), \quad a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0;$

(38.15) : $F(a) = \frac{\pi}{2} \log\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right), \quad a \in \mathbb{R};$

(38.16) : $F(p,q) = \log\left(\frac{p + q + 1}{(p+1)(q+1)}\right), \quad p > -1,\ q > -1,\ p + q > -1;$

(38.17) : $F(a,b) = \frac{\pi}{2} \log \frac{a}{b}, \quad a, b > 0 \text{ nebo } a = b \in \mathbb{R};$

(38.18) : $F(a) = \frac{\pi^2}{6a^2};$

(38.19) : $F(a) = \log \frac{1}{a + 1}.$

KAPITOLA 11

Křivkový a plošný integrál v $\mathbb{R}^n$

39. Křivkový integrál 1. druhu

39.1. Spočtěte délku oblouku

$$C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3\}$$

mezi body $[0, 0, 0]$ a $[3, 3, 2]$.

39.2. Spočtěte délku křivky

$$C = \{[r, \varphi] \in \mathbb{R}^2;\ r = a \sin^3\left(\frac{\varphi}{3}\right),\ \varphi \in [0, 3\pi]\}$$

kde $a > 0$.

39.3. Spočtěte délku prostorové křivky C, zadané rovnicemi

$$y = a \arcsin\frac{x}{a}, \quad z = \frac{a}{4}\log\frac{a-x}{a+x}$$

od bodu $[0, 0, 0]$ do bodu $[x_0, y_0, z_0]$, kde $a > 0$.

39.4. Určete, která křivka má větší délku, zda kružnice o poloměru a nebo elipsa s poloosami $\frac{a}{2}$, $2a$, kde $a > 0$.

39.5. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2}\, ds,$$

kde C je kružnice se středem v bodě $[\frac{1}{2}, 0]$ o poloměru $\frac{1}{2}$.

39.6. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, ds,$$

kde C je konvexní uzavřená křivka složená ze tří oblouků, zadaných v polárních souřadnicích pomocí následujících parametrizací:

$$\varphi = 0,\ r \in [0, a];$$
$$r = a,\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}];$$
$$\varphi = \frac{\pi}{4},\ r \in [0, a],$$

kde $a > 0$.

39.7. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\, ds,$$

kde C je oblouk šroubovice, zadaný parametricky

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

39.8. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) ds,$$

kde C je obvod astroidy,

$$C = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}},$$

kde $a > 0$.

39.9. Těžiště drátu tvaru rovinné křivky C, jehož lineární hustota je dána $f(x, y)$, má souřadnice $T = [x_0, y_0]$, kde

$$x_0 = \frac{1}{M}\int_C x f(x, y)\, ds, \qquad y_0 = \frac{1}{M}\int_C y f(x, y)\, ds,$$

přičemž $M = \int_C f(x, y)\, ds$ je hmotnost drátu.

Určete souřadnice těžiště oblouku homogenní cykloidy, zadané parametricky

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, \pi],$$

kde $a > 0$.

39.10. Dokažte, že je-li křivka zadána v polárních souřadnicích v $\mathbb{R}^2$ tak, že $r = r(\varphi)$ (kde jako obvykle $x = r \cos t$, $y = r \sin t$), pak platí vztah

$$ds = \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi. \tag{39.1}$$

39.11. S pomocí (39.1) spočtěte křivkový integrál

$$I = \int_C |y|\, ds,$$

kde C je Bernoulliova lemniskáta, zadaná rovnicí

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),$$

kde $a > 0$.

39.12. S pomocí (39.1) spočtěte délku kardioidy (srdcovky), zadané rovnicí

$$x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2.$$

Výsledky

Cvičení 39.1:

$$5$$

Cvičení 39.2:

$$\frac{3}{2}\pi a$$

Cvičení 39.3:

$$|x_0| + |z_0|$$

Cvičení 39.4:

elipsa

Cvičení 39.5:

$$2$$

Cvičení 39.6:

$$\frac{\pi e^a}{4a} + \sqrt{2}(e^a - 1)$$

Cvičení 39.7:

$$\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{(2\pi)^3}{3} b^2\right)$$

Cvičení 39.8:

$$4a^{\frac{7}{3}}$$

Cvičení 39.9:

$$T = \left[\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right]$$

Cvičení 39.11:

$$2a^2(2 - \sqrt{2})$$

Cvičení 39.11:

$$8$$

40. Křivkový integrál 2. druhu

40.1. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy,$$

kde C je část oblouku paraboly $y = x^2$ s počátečním bodem $[-1, 1]$ a koncovým bodem $[1, 1]$.

40.2. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} \frac{(x + y)\,dx - (x - y)\,dy}{(x^2 + y^2)},$$

kde C je kladně orientovaná kružnice o poloměru a se středem v počátku.

40.3. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (2a - y, x)\,d\vec{s},$$

kde C je cykloida, zadaná parametricky

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací, a kde $a > 0$.

40.4. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} \frac{-y^2\,dx + x^2\,dy}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}},$$

kde C je část oblouku asteroidy, zadané rovnicí

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

kde $a > 0$, z bodu $[0, a]$ do bodu $[a, 0]$.

40.5. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz,$$

kde C je jeden závit šroubovice, zadané parametricky

$$\varphi(t) = \left(a\cos t, a\sin t, \frac{b}{2\pi}t\right), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací, a kde $a, b > 0$.

40.6. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C)} y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$

kde C je průsečnice ploch, zadaných rovnicemi

$$z = xy, \qquad x^2 + y^2 = 1,$$

jejíž orientace je dána kladnou orientací průmětu této křivky do roviny xy.

40.7. Vypočtěte práci silového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, xz - y)$ po obvodu křivky

$$\{[t^2, 2t, 4t^3],\ t \in [0,1]\},$$

jejíž orientace je dána touto paramaterizací.

40.8. Vypočtěte práci silového pole, které působí v každém bodě $[x,y,z]$, $[x,y] \neq [0,0]$ (mimo osu z) silou nepřímo úměrnou druhé mocnině vzdálenosti od osy z a míří kolmo k ose z. jaká práce se vykoná při pohybu hmotného bodu po čtvrtkružnici

$$C = \{[\cos t, 1, \sin t],\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}?$$

40.9. Kapalina proudí rychlostí $\vec{V}(x,y) = (x, 2y)$. Určete množství kapaliny, která proteče za jednotku času elipsou, zadanou rovnicí

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Výsledky

Cvičení 40.1:

$$-\frac{14}{15}$$

Cvičení 40.2:

$$-2\pi$$

Cvičení 40.3:

$$-2\pi a^2$$

Cvičení 40.4:

$$\frac{3}{16}\pi a^{\frac{4}{3}}$$

Cvičení 40.5:

$$0$$

Cvičení 40.6:

$$-\pi$$

Cvičení 40.7:

$$\frac{5}{2}$$

Cvičení 40.8:

$$k\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

kde k je konstanta úměrnosti.

Cvičení 40.9:

$$18\pi$$

41. Greenova věta

41.1. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (-y^3 + \log x)\,dx + (x^3 + y^2)\,dy,$$

kde (C) je kladně orientovaná hranice oblasti

$$G = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 16, \quad 0 \le x \le y \le \sqrt{3}x\right\}.$$

41.2. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} xy^2\,dy - x^2y\,dx,$$

kde (C) je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$.

41.3. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{(C)} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

kde (C) je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

41.4. Pomocí Greenovy věty vypočítejte křivkový integrál

$$I = \int_{(C)} e^x((1-\cos y)\,dx - (y - \sin y)\,dy),$$

kde (C) je kladně orientovaná hranice oblasti

$$G = \left\{[x,y] \in \mathbb{R}^2, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \sin x\right\}.$$

Výsledky

Cvičení 41.1:

$$\frac{63\pi}{12}$$

Cvičení 41.2:

$$\frac{\pi a^4}{2}$$

Cvičení 41.3:

$$-2\pi ab$$

Cvičení 41.4:

$$-\frac{1}{5}\left(e^{\pi} - 1\right)$$

42. Plošný integrál 1. druhu

42.1. Spočtěte obsah sféry

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = r^2\}, \quad r > 0.$$

42.2. Spočtěte obsah rovinné plochy

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z = ax + by, \quad x^2+y^2 \le 1\}, \quad a, b > 0.$$

42.3. Spočtěte obsah části povrchu rotačního hyperboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z = xy, \quad x^2+y^2 \le 1\}.$$

42.4. Spočtěte obsah stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ z = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right), \quad x^2+y^2 \le 1\}.$$

42.5. Spočtěte obsah povrchu anuloidu, jehož průřez má poloměr R_2, přičemž vzdálenost středu průřezové kružnice od jeho osy je R_1, $R_1 > R_2$.

42.6. Spočtěte plošný integrál 1. druhu

$$\iint\limits_M z\,dS,$$

kde M je helikoid, zadaný parametrizací

$$M = \{[t\cos s, t\sin s, s] \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [0,a], s \in [0,2\pi]\}.$$

42.7. Těžiště plochy M je dáno vzorcem

$$T = [x_t, y_t, z_t] = \frac{1}{\iint\limits_M dS}\left(\iint\limits_M x\,dS, \iint\limits_M y\,dS, \iint\limits_M z\,dS\right).$$

Vypočítejte těžiště homogenního rotačního paraboloidu

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = 2z, \quad 0 \le z \le 2\}.$$

42.8. Podle Pascalova zákona je hydrostatická síla působící v daném bodě povrchu tělesa dána výrazem

$$F_i = \varrho g \iint\limits_M h n_i \, dS, \quad i = 1, 2, 3,$$

kde n je hloubka v daném bodě, n_i je i-tá složka vnější jednotkové normály plochy M.

Dokažte, že (v souladu s Archimédovým zákonem), hydrostatická síla, která působí na stěny nádoby tvaru rotačního paraboloidu

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 = z, \quad 0 \le z \le 1\},$$

je rovna

$$\vec{F}(0, 0, -\frac{\pi \varrho g}{2}).$$

Výsledky

Cvičení 42.1:

$$4\pi r^2$$

Cvičení 42.2:

$$\pi \sqrt{1 + a^2 + b^2}$$

Cvičení 42.3:

$$\frac{3}{2}\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Cvičení 42.4:

$$\frac{3}{2}\pi \left(2\sqrt{2} - 1\right)$$

Cvičení 42.5:

$$4\pi R_1 R_2$$

Cvičení 42.6:

$$\pi^2 \left(a\sqrt{1 + a^2} + \log\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)\right)$$

Cvičení 42.8:

$$T = \left[0, 0, \frac{50\sqrt{5} + 2}{50\sqrt{5} - 10}\right]$$

43. Plošný integrál 2. druhu

43.1. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} z \, dx \, dy,$$

kde (M) je kladně orientovaná plocha sféry

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

43.2. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} (y - z) \, dy \, dz + (z - x) \, dz \, dx + (x - y) \, dx \, dy,$$

kde (M) je kuželová plocha

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 z^2, \quad z \in [0, h]\}.$$

s vnější orientací.

43.3. Spočtěte integrál

$$\int_{(M)} x^2 \, dy \, dz + y^2 \, dz \, dx + z^2 \, dx \, dy,$$

kde (M) je vnější povrch sféry

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3, \ (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2, \quad a, b, c, R > 0\}.$$

43.4. Spočtěte integrál
$$\int_{(M)} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$
kde (M) je vnější povrch sféry
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad a > 0\}.$$

43.5. Spočtěte integrál
$$\int_{(M)} \frac{dy\,dz}{x} + \frac{dz\,dx}{y} + \frac{dx\,dy}{z},$$
kde (M) je vnější povrch elipsoidu
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a,b,c > 0\}.$$

43.6. Spočtěte integrál
$$\int_{(M)} xz\,dy\,dz + xy\,dz\,dx + yz\,dx\,dy,$$
kde (M) je vnitřně orientovaný povrch jehlanu ohraničeného rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$.

43.7. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ ven z válce
$$P = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 \le a^2, \quad z \in [-h,h]\}, \quad a,h > 0.$$

43.8. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (z,0,x^2)$ nahoru parabolickou střechou
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2 = z, \quad x,y \in [-1,1]\}.$$

43.9. Spočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (yz, -xz, x^2+y^2)$ nahoru plochou zadanou parametricky
$$\Phi(r,t) = (e^r \cos t, e^r \sin t, r)\,.$$

Výsledky

Cvičení 43.1:
$$\frac{4}{3}\pi$$

Cvičení 43.2:
$$0$$

Cvičení 43.3:
$$\frac{8\pi a R^3}{3}$$

Cvičení 43.4:
$$\frac{4\pi R^3}{3}$$

Cvičení 43.5:
$$4\pi\left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c}\right)$$

Cvičení 43.6:
$$-\frac{1}{8}$$

Cvičení 43.7:
$$6\pi h a^2$$

Cvičení 43.8:
$$\frac{4}{3}$$

Cvičení 43.9:
$$\frac{\pi(e^4-1)}{3}$$