

# Limity funkcí – příklady z písemných prací

A. Vypočtěte následující limity.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kde  $a_1 = \sin(\pi/3)$ ,  $a_{n+1} = \sin a_n$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1^x + 2^x + 3^x}{3} \right)^{1/x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{1/x^3}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\log \left( 1 + \frac{3}{x} \right)} (\log(1+x^3))^2$

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{5/2} \arcsin \left( \sqrt{n^5 + 1} - \sqrt{n^5 - 1} \right)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log \sqrt{1+x^2}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + \frac{2 \log(\cos x)}{x^2}}{\sqrt{x}}$

9. Pro která  $\alpha \in \mathbb{R}$  existuje vlastní limita  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\sqrt{1+x^2} - x^\alpha)}{x^\alpha}$  ?

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 + e^x)}{\log(x^4 + e^{2x})}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^{2^x} - 2^{x^2}}{2^x - x^2}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)^{1/x^2}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 2} (3-x)^{\frac{1}{\sin(\pi x/2)}}$

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{2n+a} - \sqrt[3]{2n+b} \right) \cdot \sqrt[3]{(n+1)(3n+2)}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$

15.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \sqrt{\arcsin x} \right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}}$

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 3^x}{2} \right)^{1/\sin x}$

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)^{\sqrt{n^2+1}}$

18\*\*.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \right)$

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( 10^{n^2} + 10^n + n^2 \right) \sin \left( \frac{2n}{n^3+n} \right)$

20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+15} + 2\sqrt{x}} \right)^x$

21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)^{100} - (n+2)^{200} + 400n^{199}}{1+2+3+\dots+n^{99}}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{\cos x})^{\operatorname{tg}^2(x - \frac{\pi}{2})}$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{e})^{\sin x} - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})}$

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(5 + e^{2n})}{n^{3/2}} \cdot \cos(n)$
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - 2 \cos(x)}{\sin(x^2)} \right)^{1/x^2}$
27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n} \right) \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}}$
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\log(n+1)} - \sqrt{\log n} \right) \cdot n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
29.  $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos x)) \cos x}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin x)}$
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/3n)}{\log(1 - n + \sqrt{n^2 + 1})}$
31.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+2) \log(x+1) - (x+3) \log(x+2) + \log x]$
32.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(\pi(x - \frac{\pi}{4}))}{\cos 2x} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^k, k \in \mathbb{Z}$
33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2e^{\frac{4x}{x+1}} - 1 \right)^{\frac{x^2+1}{3x}}$
34.  $\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos x)^{\cotg^2 x}$
35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 5n \right) \cotg \frac{3}{n}$
36.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{2x}}}{\arccos x}$
37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{2n^2 + 1}} \right)^{n/3}$
38.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\log(\cos(\pi 2^x))}$
39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\log(n^2 + 4) - \log(n^2)}}{\operatorname{arccotg} n}$
40.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x}{1 - e^{-x}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}}$
41.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{4^x + 5^x + 6^x}{3} \right)^{1/x}$
42.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \text{ kde } a_1 = 4, a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$
43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\sqrt{1 + 3x^2}} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
44.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^{-2} + e^{1/n})}{\log(n^{-4} + e^{2/n})}$
45.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$
46.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2x} - 1}{\log(x^3) + (x-1)^2}$
47.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + 2n} - n \right)^{3n}$
48.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 6n} - \sqrt[3]{n^3 + 7}}{\sqrt{n^2 + 4} - \sqrt{n^2 + 1}}$
49.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 - \operatorname{arctg} x)}{\log(x^2 + \operatorname{arctg} x)}$

50.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2^n + 3^n}}{2^n \sqrt[4]{4^n + \sqrt{n}}}$
51.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\log(\sin x + \cos x)}{\log(\cos x - \sin x)} \right)^3$
52.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n} - \sqrt[3]{n^3 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 2n} - \sqrt[3]{n^3 + n}}$
53.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 1}}$
54.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sin(n + 1)) \left( \sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1} \right)$
55.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}$
56.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n$
57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\operatorname{tg} x}$
58.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sqrt[n]{2} - 1 \right)$
59.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}$
60.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + 2^n)}{\sqrt[3]{n^3 + n^2}}$
61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^x + 8^x}{2} \right)^{1/x}$
62.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^3 \sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}$
63.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 4)^{100} - (n + 3)^{100}}{(n + 2)^{100} - n^{100}}$
64.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sqrt{x + 1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{x + 1}}$
65.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + n^3 + n^4 + 2^n + 3^n + 4^n}$
66.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{arctg}(\arcsin x)}$
67.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n^2 + n + 1) - \log(n^2 + n)}{\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}}$
68.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 + (-1)^n n^2) \sin\left(\frac{n + 1}{n^5}\right)$
69.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log(n^6 + 5n^3 + 1) - \log(n^6 + 1)) \cdot (n^3 + \cos n)$
70.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\operatorname{arctg} x)}{x^2}$
71.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1)^5 - n^5}{n^4 \sqrt[n]{\log(n + 1)}} \cdot \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right)$
72.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 2x} - x \right)^x$
73.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin^2\left(n + \frac{1}{n}\right) + \cos^2 n \right)$
74.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1 + 2x + 4^x}{2} \right)^{1/x}$
75.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^8 + n^3} - n^4}{\sqrt[3]{n^6 + 5n^3} - n^2}$

$$76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{(x^6)} - 1}}{x \log(\cos x)}$$

$$77. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n^n + n} - n)$$

$$78. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log(\sin x) \cdot \operatorname{tg}^2 x$$

$$79. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{120} - (1 + \frac{2}{n})^{80}}{(1 - \frac{1}{n})^{100} + (1 + \frac{3}{n})^{100} - 2}$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sqrt{x}}}{1 - \cos \sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}$$

$$81. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log(n^2))^2}{\sqrt{n + 5 \log^2 n} - \sqrt{n + 2 \log^2 n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$$

$$83. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\sqrt{n} + 3) - \frac{1}{2} \log n}{\sqrt[3]{n^6 + 2n^4} - n^2} \cdot \sqrt{n}$$

$$84. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{x} - \sin \sqrt[3]{x}}{\cos(x + \frac{\pi}{2})} \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

$$85. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{150} - (1 + \frac{2}{n})^{60}}{(1 - \frac{1}{n})^{99} + (1 + \frac{3}{n})^{99} - 2}$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$$

$$87. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2 + \frac{1}{n})^{100} - (4 - \frac{3}{n})^{50}}{(8 - \frac{1}{n})^{34} - (4 + \frac{1}{n})^{51}}$$

$$88. \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} (4x^2 - 9\pi^2) \cdot \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

$$89. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + 5n} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{\sqrt{n^4 + n + 1} - \sqrt{n^4 + 1}}$$

$$90. \lim_{n \rightarrow \infty} (3 \log(1 + \sqrt[3]{n}) - \log n) \cdot (\sqrt[3]{n^4 + n^3} - \sqrt[3]{n^4 - n^3 + 1})$$

$$91. \lim_{x \rightarrow 1} \left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^{1/\sin^2(\pi x)}$$

$$92. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{n^2 + \sin^2 n} - \sqrt{n^2 - \cos^2 n})}{\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1}}$$

$$93. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{9^{\sin x} + \cos x}{2}\right)^{\cotg x}$$

$$94. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$96. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2^n}{n^8 + 2^n}\right)^{2^n/n^8}$$

$$97. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2^{(\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x})} - 2^{1/x}\right)$$

$$98. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - \sqrt[3]{n^3 - n + 2}}{\sqrt{n^4 + 2n + 3} - \sqrt{n^4 + n + 4}}$$

99\*. (Ize i bez Taylorova rozvoje či l'Hopitalova pravidla, ale je to obtížnější)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sqrt{1 + 3x + 1}}{\sin(x^2)}$$

$$100^*. \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( 2^{1/n} - 2^{1/\sqrt{n^3}} \right)$$

$$101. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{1+2x} + 2x \right)^{1/\sin^2 x}$$

$$102. \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\log\left(\frac{x}{\pi}\right)}. \text{ Existuje oboustranná limita?}$$

$$103. \text{ Je dáno číslo } a \in [1, 3]. \text{ Rozhodněte, zda existuje } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ a spočítejte ji, pokud } a_1 = a, a_{n+1} = 4 - \frac{3}{a_n}$$

$$104. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 \arccos x}{\pi} \right)^{(1+e^x) \cotg x}$$

105\*. (Ize i bez Taylorova rozvoje či l'Hopitalova pravidla, ale je to obtížnější)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\sqrt{e^2 - e^{4x}}}{\arccos(2x)}$$

$$106. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[ \log(n^3 + \frac{1}{4}) - \log(n^3) \right] (-1)^n \sqrt[n]{n^n + n}}{1 - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$107. \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} (2\pi - x) \sqrt{\sin(2\pi - x)}$$

$$108. \lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$109. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n + \sin^2 n} - \sqrt{n - \cos^2 n}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}$$

$$110. \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{(\cos x)^x + 2^x}{2} \right)^{1/x}$$

$$111. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sqrt[4]{n^4 + 4n^3} - n \right], \text{ kde } [\dots] \text{ značí celou část.}$$

$$112. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\log(\cos(\sin x))}{\log(1 - \sin^2(\sin x))}$$

$$113^*. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\sqrt{n^3+1}] + [\sqrt{n^3-1}]}{\sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + \dots + n^n}}, \text{ kde } [\dots] \text{ značí celou část. (nápad!)}$$

$$114. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{(x^2)^x + x^{(x^2)}}{2} \right)^{\frac{1}{x \log x}}$$

$$115. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^{50} - (n^2+1)^{25}}{\sqrt{n^{100} + n^{99} - 1} - \sqrt{n^{100} + 2n^{99} + 1}}$$

$$116. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + 2^x + 3^x + 4^x) \cdot \log(1 + x^2)}{x \log x}$$

$$117. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + 2^n + n^2} \cdot \log \left( 1 + \frac{7}{n} \right)$$

$$118. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin^2 x)^{1/x^2}$$

$$119. \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2^n + 3^n + 4^n) \cdot \sin \frac{5}{n}$$

$$120. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^{(x^2)} - 1}}{\operatorname{arctg} x}$$

$$121. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 25 + \frac{1}{n} \right)^6 - \left( 5 + \frac{1}{n} \right)^{12} \right) \cdot \sqrt[6]{(n+2)^7 - (n-1)^7}$$

$$122. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{(2^{x+1}-2)} - 1}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$123. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$$

124.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \operatorname{arctg} 3x} - \sqrt[3]{1 - \arcsin 2x}}{\sqrt[4]{1 - \arcsin 4x} - \sqrt[4]{1 + \operatorname{arctg} 5x}}$
125.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{1}{n} + e^{1/n}\right)}{\log\left(\frac{1}{n} + e^{2/n}\right)}$
- 126\*.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 4^x - 1}{2 \cdot 3^x - 9^x - 1}$  (nápad!)
127.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{4^n + 2^n} - \sqrt[3]{4^n - 2^n}}{\sqrt[3]{4^{n+1} + 2^{n+1}} - \sqrt[3]{4^{n+1} - 2^{n+1}}}$
128.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\log n}{\log(n+1)} \right)^{n \log n}$
129.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{21} - \left(1 + \frac{30}{n^2}\right)^7 - \frac{21}{n}}{\sqrt{n^4 + 20} - \sqrt{n^4 + 1}} \cdot \sqrt[n]{n^n + 2}$
130.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) \log \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{x - 1}$
131.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + n^2 + 2^n) \cdot n!}{(n + 30)! (\sqrt{n^{60} + 1} - n^{30}) \sqrt[n]{\sin n + n^n}}$
132.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{1 + \sqrt{\operatorname{tg} x}}{1 + \sqrt{\sin x}} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x} \sin^2 x}}$
133.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot \sqrt{n^2 + n} - n \cdot \sqrt{4^n + 1}}{\sqrt[n]{2n^2 + 1}}$
134.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , kde  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos \sqrt{x}}{x} & x > 0 \\ \left(\frac{2+x^2 6^x}{2+x^2 4^x}\right)^{2/x^3} & x < 0 \end{cases}$
135.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n-1}) \log(2^n + 3^n + n)$
136.  $\lim_{x \rightarrow 0} (2^{1+\sin x} - 1)^{\frac{1}{2^x - 1}}$
137.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^{10} + n^3)^7 - (n^7 + 1)^{10}) \cdot \left( \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^9}\right)^7} - 1 \right)^7$
138.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1 + \cos x)^x + 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$
139.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(n + \frac{2}{n}\right)^{30} - \left(n + \frac{1}{n}\right)^{30}}{\sqrt{(2 + n^7)^8 - 2^8}}$
140.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + x^3 + 3^x + x^x)}{\log(1 + x^3 + 3^x) \cdot \log(1 + x^3)}$
141.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + \dots + n^{2n}} \cdot \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right)$
142.  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \log(\sin^2 x)}{\sqrt{1 + \sin x}}$
143.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \cdot \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$ , kde  $[\dots]$  značí celou část.
144.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} \cdot \log(\cos x) - \sqrt{1 + \log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$
145.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sin n} - \sqrt{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^2 + \operatorname{arctg} n}}$
146.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2} \right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

147.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} - \sqrt{n^{n+2}(n+2)^n}}{n^n}$
148.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos(\sin x)}}{\ln \sqrt{e^{2x} + x}}$
149.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\cos \frac{3}{n}}{\cos \frac{5}{n}} \right)^{n^2}$
150.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x + \arcsin x)^{1/\ln x}$
151.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\cos(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{n} \right)^{n/7}$
152.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(\cos^2(\pi \cdot 4^x))}{\log(\cos(\pi \cdot 2^x))}$
153.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \log^3 n \left( \sqrt[4]{\log(n+8)} - \sqrt[4]{\log n} \right)^4$
154.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)^{\frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}}}$
155.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sin \operatorname{arccotg} \sqrt{n}}$
156.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(\operatorname{arctg} x)^{2/x} + 4^{1/x}}{2} \right)^x$
157.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{e^{2x} - e^2}}{\arccos \frac{1}{x}}$
- 158\*.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n \cdot (\operatorname{arctg} \log n - \operatorname{arctg} n)$
159.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt[3]{e})^{\sin x} - \cos \sqrt{x}}{(\log(1 + \sqrt{x}))^2}$

## B.

1. Určete  $a, b \in \mathbb{R}$  tak, aby platilo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt[3]{x^3 - x} - ax - b \right) = 0.$$

2. Určete  $\alpha > 0$  tak, aby následující limita byla vlastní

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^\alpha + 1)^3 + \alpha(-1)^n}{(\sqrt{n^2 + 1} - n) n^2}$$

C. Nalezněte všechny hodnoty parametrů takové, aby posloupnost byla (a) omezená, (b) konvergentní.

- $\left\{ \frac{\sin(n\pi/4) \log(5 + e^{2n})}{n^\alpha} \right\}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\left\{ \left( \log(e^{n^2} + 1) \right)^\alpha \cdot \arcsin \left( \frac{1}{n^4 + 7} \right) \cdot (-1)^n \right\}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $\left\{ (-1)^n \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{n^2 + 1} \right) \left( \log(e^{n^3} - 2) \right)^\alpha \right\}, \alpha \in \mathbb{R}$

D. Vhodným užitím l'Hopitalova pravidla nebo Taylorova rozvoje určete následující limity.

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n - \sin \frac{1}{n} \right)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left( 2 \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 2 + \frac{1}{n^4} \right)$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \left( 1 + \frac{\alpha}{n} \right)^n - e^\alpha \right)$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{(\sqrt{5}+1)/2} - 2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + \cos x}{x^3}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + \cos x - \sin x}{\log^3(1+x)}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin x - \sin x}{e^x - x - \cos x - x^2}$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left( \sin \left( \frac{1}{n} \right) - \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \right)$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left( 2 \cos \left( \frac{1}{n^2} \right) - 3 + \sqrt{1 + \frac{2}{n^4}} \right)$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{(1+x) \log(1+x)}{\sin^2 x} - \frac{1}{x} \right)$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{x^3(e^x - 1)^3}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x^{10}) - \sqrt{1 + 2x^{10}} + 1}{x^{20}}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{e^{x^3} - 1}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left( \frac{\sin x}{x} \right)}{x^2}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x(\cos x + \sqrt{1+x}) - \sin x}{\sin(x^2)}$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[ \frac{1}{\sqrt{e}} - \left( 1 - \frac{1}{2n} \right)^n \right]$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{e^x - \sin x} - \sqrt{1 + \frac{1}{2}x^2}}{\arcsin x - \sin x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{e^x - \cos x - x - x^2}$
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^8 \left( 5 - 4 \cos \frac{1}{n^2} - \sqrt{1 + \frac{4}{n^4}} \right)$

### E.

1. Existuje posloupnost reálných čísel, která má limitu a přitom není omezená ani shora ani zdola? Pokud ano, napište příklad. Pokud ne, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.
2. Necht'  $\{a_n\}$  je konvergentní posloupnost s limitou  $a$ . Může se stát, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $a_n$  celé číslo, ale  $a$  není celé? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.
3. Necht'  $\{a_n\}$  je konvergentní posloupnost s limitou  $a$ . Může se stát, že pro každé  $n \in \mathbb{N}$  je  $a_n$  racionální číslo, ale  $a$  není racionální? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.
4. Existují posloupnosti  $\{a_n\}$  a  $\{b_n\}$  tak, aby  $\lim a_n = 0$ ,  $\lim b_n = +\infty$  a  $\lim a_n b_n$  neexistuje? Pokud ano, uveďte příklad. Pokud ne, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.



**Výsledky A.**

1. 0	2. $-\frac{5}{12}$	3. $\sqrt[3]{6}$	4. $\sqrt{e}$
5. 0	6. 1	7. -1	8. 0
9. $\alpha \in (0, 2]$	10. 1/2	11. $16 \log 2$	12. $e^{1/6}$
13. $e^{2/\pi}$	14. $\frac{a-b}{3} \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$	15. $e^{-\sqrt[4]{2}}$	16. $\sqrt{6}$
17. $e$	18. 1	19. 2	20. $e^{-13/6}$
21. -159000	22. 1	23. $1/\sqrt[4]{e}$	24. 1
25. 0	26. $e^{-1/12}$	27. $1/e$	28. ?
29. ?	30. 2/3	31. -1	
32. 0 pro $k > 0$ ,	$-\frac{\pi}{2}$ pro $k = 0$	a $-\infty$ pro $k < 0$ sudé,	NEEX pro $k < 0$ liché
33. $e^{8/3}$	34. $e^{-1/2}$	35. ?	36. ?
37. ?	38. ?	39. ?	40. ?
41. ?	42. ?	43. ?	44. ?
45. $2/\sqrt{3}$	46. 2/3	47. $e^{-3/2}$	48. $e^{-3/2}$
49. -1/6	50. 3/2	51. -1	52. 1
53. 2	54. 1/2	55. 1	56. $e$
57. $1 - \sqrt{3}$	58. $\log 2$	59. 1	60. $\log 2$
61. 4	62. neex.	63. 1/2	64. 1
65. 4	66. 1	67. 2	68. 1
69. ?	70. ?	71. ?	72. ?
73. ?	74. ?	75. ?	76. ?
77. ?	78. ?	79. ?	80. ?
81. ?	82. ?	83. ?	84. ?
85. ?	86. ?	87. -175/136	88. $24\pi$
89. 10/3	90. ?	91. ?	92. ?
93. ?	94. ?	95. ?	96. ?
97. ?	98. ?	99. ?	100. ?
101. ?	102. ?	103. ?	104. ?
105. ?	106. ?	107. ?	108. ?
109. 1/2	110. $\sqrt{2}$	111. 0	112. $\frac{1}{2}$
113. 2	114. $e$	115. -700	116. $4 \log 2$
117. 7	118. $\sqrt{e}$	119. $10 \log 2$	120. neex. (zl. -1, zp. 1)
121. $-54 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt[6]{21}$	122. neex. (zl/zp $\mp 2\sqrt{2} \log 2 \log 3$ )	123. 4/5	124. -20/27
125. 2/3	126. $\left(\frac{\log 2}{\log 3}\right)^2$	127. $\sqrt[3]{2}$	128. 1/e
129. ?	130. ?	131. ?	132. ?
133. ?	134. ?	135. ?	136. ?
137. $-\frac{7^7}{3^6}$	138. $\sqrt{2}$	139. 30	140. $\frac{1}{3 \log 3}$
141. 9/2	142. neex. (zl. $-\sqrt{2}$ , zp. $\sqrt{2}$ )	143. 2	144. 3/4
145. -6	146. $\sqrt{e}$	147. $\frac{3}{2}e$	148. $-\sqrt{2}/3$
149. $e^8$	150. $e$	151. $\sqrt[3]{e}$	152. 32
153. 16	154. neex. (zl/zp $e^{\mp 1/\sqrt{2}}$ )	155. 1	156. $\pi$
157. $e$	158. -1	159. 5/6	

**Výsledky B.**

1.  $a = 1, b = 0$     2.  $\alpha = \frac{1}{3}$

**Výsledky C.**

1. omezená pro  $\alpha \geq 1$ , konvergentní pro  $\alpha > 1$     2. omezená pro  $\alpha \leq 2$ , konvergentní pro  $\alpha < 2$

**Výsledky D.**

1. $-e/2$	2. $-\frac{1}{2}$	3. $\frac{1}{12}$	4. $-\frac{\alpha^2}{2}e^\alpha$
5. $\frac{\sqrt{5}-3}{12}$	6. $\frac{1}{3}$	7. 2	8. $+\infty$
9. ?	10. ?	11. $-\frac{1}{6}$	12. $\frac{1}{2}$
13. $\frac{1}{3}$	14. $-\frac{1}{6}$	15. $\frac{1}{4}$	16. ?
17. $\frac{1}{2}$	18. 3	19. $\frac{11}{6}$	

**Výsledky E.**

1. NE. Je-li limita vlastní, je posloupnost omezená. Je-li limita  $+\infty$  (resp.  $-\infty$ ), je posloupnost omezená zdola (resp. shora).

2. NE. Protože vzdálenost mezi celými čísly je alespoň 1, musí být posloupnost od určitého členu počínaje konstantní (definice, BC-podmínka).

3. ANO. Např.  $a_n = (1 + 1/n)^n$ .

4. ANO. Např.  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$  a  $b_n = n$ .