Derivace funkce – příklady z písemných prací

Není-li řečeno jinak, určete derivaci a jednostranné derivace funkce ve všech bodech definičního oboru, kde existují.

1. $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{1/x^2} & x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\} \\ \frac{1}{\sqrt{e}} & x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \arcsin(1 - x^4)$

3. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 x \cos\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) & x \neq 0, 1 \\ 0 & x = 0, 1 \end{cases}$ Zjistěte navíc, kde je f spojitá.

4. Zjistěte, zda existuje c tak, že funkce

$$f(x) = \begin{cases} 2^{2^x} & x \geq 2 \\ 2^{x^2} + c(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

má v bodě 2 vlastní derivaci.

5. Spočtěte derivaci funkce

$$f(x) = \left|\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right| + |x-1|$$

v bodě 1.

6. $f(x) = \max\{1, e^{\sin x}\}$

7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

8. $f(x) = \left[\dfrac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x\right] \cdot \sin(\pi x)$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

9. Napište příklad funkce f, která splňuje $f'_+(2) = +\infty$ a $f'_-(2) = -\infty$.

10. $f(x) = |\sin(2x)| \cdot \sin x$

11. Napište příklad funkce f, která není spojitá v bodě 7 a přitom platí, že $f'_+(7) = 2$.

12. $f(x) = (x^2 + x)\sqrt{1 - \cos x}$

13. Nechť je funkce f spojitá v bodě 3. Musí existovat $f'_+(3)$? Pokud ne, uveďte příklad. Pokud ano, svou odpověď pečlivě zdůvodněte.

14. $f(x) = (\max\{x, 1\})^{[x]}$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

15. Napište příklad funkce f, která je spojitá v bodě 1 a přitom $f'(1)$ neexistuje.

16. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x) & x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \\ 1 & x \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\} \end{cases}$

17. $f(x) = \max\{x(x-1)^2 + x, x\}$

18. Nalezněte všechna $a > 0$, pro která má funkce f vlastní derivaci ve všech bodech intervalu $(0, +\infty)$. Derivaci spočtěte pro každé $x \in (0, +\infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{(x^a)} & x \in (0, 1] \\ x^{a^x} & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

19. $f(x) = \arcsin\big(\exp(-x^2)\big)$

20. $f(x) = \min\{\max\{x, x + x^3\}, x + 1\}$

21. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) + \operatorname{sgn}(\sin 2x)$

22. $f(x) = (x-1)^2 |x^2 - 1|$

23. $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $f(\frac{\pi}{2} + k\pi) = \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

24. $f(x) = \max\left\{\min\left\{\cos x, \dfrac{1}{2}\right\}, -\dfrac{1}{2}\right\}$

25. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$

26. $f(x) = \arccos \dfrac{1}{1 + x^2}$

27. $f(x) = \begin{cases} x^2(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

28. $f(x) = x^{(x^x)}$

29. Nalezněte $A, B, C \in \mathbb{R}$ tak, aby pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platilo

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} \log \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}\right)' = \frac{A \cos x + B \sin x}{C + \cos 2x}$$

30. $f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}$

31. $f(x) = \max\{x^3 - 1, x^3 + x\}$

V dalších příkladech vyšetřete (i jednostrannou) spojitost a spočtěte (i jednostranné) derivace všude, kde existují.

32. $f(x) = \begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{má-li výraz smysl} \\ e & x = 0 \end{cases}$

33. $f(x) = \arcsin \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

34. $f(x) = \max\{x^2, x^3 + \operatorname{sgn} x\}$

35. $f(x) = (x+2)^2 \sqrt{|x^2 - 4|}$

36. $f(x) = \max\{x + \sin x, x + \sin^2 x\}$

37. $f(x) = \arcsin(\cos^3 x)$

38. $f(x) = \sqrt[3]{e^{3x^3} - 1}$

39. $f(x) = \sqrt{e^{\sin^2 x} - 1}$

40. $f(x) = \arccos(\sin^3 x)$

Určete derivaci a jednostranné derivace funkce ve všech bodech definičního oboru, kde existují.

41. $f(x) = \sin(\arccos^2 x)$

42. $f(x) = \max\{\sin x, \operatorname{tg} x\}$

43. $f(x) = \max\{x^2, \sqrt[3]{x}\}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^{(2^x)} & x \in (0, 2] \\ x^{(x^2)} & x \in (2, +\infty) \end{cases}$

45. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \cdot (\cos(2x) - 1)$

46. $f(x) = \arcsin(e^{-|x|})$

47. $f(x) = \arcsin\left(\min\left\{1, \dfrac{1}{x}\right\}\right)$

48. Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f měla v bodě 1 vlastní derivaci:

$$f(x) = \begin{cases} x^{(x^c)} - 1 & x \in (0, 1] \\ \operatorname{arctg}(\sin(c(x-1))) & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

49. $f(x) = \max\{-x^4, \min\{x^3, x^2\}\}$

50. $f(x) = \sqrt[4]{1 - \left|\dfrac{4x}{x^2 + 4}\right|}$

51. $f(x) = \sqrt[3]{e^{\sin^2 x} - 1}$

V dalších příkladech vyšetřete (i jednostrannou) spojitost a spočtěte (i jednostranné) derivace všude, kde existují.

52. $f(x) = \min\{x^3, x \cdot |x|\}$

53. $f(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^{\sqrt[3]{x^2}}$

54. $f(x) = \cos x \cdot [\sin x]$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

55. $f(x) = (x - [x]) \cdot x$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

56. $f(x) = \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}}$

57. $f(x) = (e + |x|)^x$

58. $f(x) = \min\{x, \sqrt[3]{x}, x^2\}$

59. $f(x) = \sin x + \cos x + |\sin x - \cos x|$

60. $f(x) = (x+1)^2 \operatorname{sgn}(x^2 + 3x + 2)$

61. Nalezněte všechna $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ taková, že funkce f níže má v každém bodě $\mathbb{R}$ vlastní druhou derivaci.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + \gamma & x \le 0 \\ \sin(\beta x) & x > 0 \end{cases}$$

V dalších příkladech vyšetřete (i jednostrannou) spojitost a spočtěte (i jednostranné) derivace všude, kde existují.

62. $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \max\{x, x^2\}\right)$

63. $f(x) = \operatorname{sgn}(x^2 + 2x)\,|x|\,\cos(\sin x)$

64. $f(x) = \left[\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x\right] \operatorname{arctg} x^2$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

65. $f(x) = \min\{x + \operatorname{sgn} x + \cos x;\ x + \operatorname{sgn} x + \cos^2 x\}$

66. $f(x) = \begin{cases} \frac{|\sin x|}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

67. $f(x) = \max\{5x - 4,\ x^2\}$

68. $f(x) = [x] \cdot \sqrt[3]{x^2 - 9}$, kde $[\cdots]$ značí celou část.

69. $f(x) = |\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$

70. $f(x) = (x + |x| + 1)^{|x-1|}$

71. $f(x) = (x^2 - 1)\sqrt{1 + \cos(\pi x)}$

72. $f(x) = \left(\max\{1,\ 2x,\ x^2\}\right)^x$

73. $f(x) = \sqrt{2^{x^2 - 2x} - \frac{1}{2}}$

74. $f(x) = (x - 2) \cdot \max\{x^2, x + 2\}$

Výsledky

1. $f'(x) = \begin{cases} (\cos x)^{1/x^2} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \left(\frac{2\log(\cos x)}{x} + \operatorname{tg} x\right) & x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

2. $f'(x) = \frac{-4x^3}{\sqrt{2x^4 - x^8}}$ pro $x \in (-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}) \setminus \{0\}$, $f'(0) = 0$, $f'_+(-\sqrt[4]{2}) = +\infty$, $f'_-(\sqrt[4]{2}) = -\infty$.

3. Funkce je spojitá na $\mathbb{R}$. Derivaci má

$$f'(x) = \frac{x\left(1 - 4x + 3x^2\right)\cos\left[\frac{1}{-1+x} + \frac{1}{x}\right] + \left(1 - 2x + 2x^2\right)\sin\left[\frac{1}{-1+x} + \frac{1}{x}\right]}{x}, \qquad x \neq 0, 1,$$

dále $f'(1) = 0$ a v bodě 0 neexistují ani jednostranné derivace.

4. $c = 64\log 2(\log 2 - 1)$

5. 0

6. $f'(x) = 0$ pro $x \in (\pi, 2\pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = e^{\sin x}\cos x$ pro $x \in (0, \pi) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ a dále $f'_+(2k\pi) = 1$, $f'_-(2k\pi) = 0$, $f'_+((2k+1)\pi) = 0$, $f'_-((2k+1)\pi) = -1$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

7. ??

8. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ je $f'(x) = \left[\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} x\right] \cdot \pi\cos(\pi x)$. Dále je $f'_-(-1) = 2\pi$, $f'_+(-1) = \pi$, $f'_-(0) = f'_+(1) = -\pi$, $f'_+(0) = f'_-(1) = 0$.

9. Například $f(x) = 1$ pro $x \neq 2$ a $f(2) = 0$.

10. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2};\, k \in \mathbb{Z}\}$ je $f'(x) = \operatorname{sgn}(\sin 2x) \cdot 2\cos 2x \cdot \sin x + |\sin 2x| \cdot \cos x$. Dále $f'(k\pi) = 0$, $f'_+(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^k$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + k\pi) = (-1)^{k+1}$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

11. Například $f(x) = 0$ na $(-\infty, 7)$ a $f(x) = 2x$ na $(7, +\infty)$.

12. $f'(x) = (2x+1)\sqrt{1 - \cos x} + (x^2 + x)\frac{\sin x}{2\sqrt{1 - \cos x}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$. Dále $f'(0) = 0$ a pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je $f'_+(2k\pi) = (4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'_-(2k\pi) = -(4k^2\pi^2 + 2k\pi)\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. NE. Např. $f(x) = 0$ pro x racionální, $f(x) = x - 3$ pro x iracionální.

14. $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) = [x]x^{[x]-1}$ pro $x \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$. Dále pro $k \in \mathbb{N}$ je $f'_+(k) = k^k$, $f'_-(1) = 0$ a $f'_-(k) = +\infty$ pro $k > 1$.

15. Např. $f(x) = |x - 1|$.

16. $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi) \cup (k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Dále $f'(k\pi) = +\infty$, $f'_-(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, $f'_+(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -\infty$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

17. $f'(x) = (x-1)^2 + 2x(x-1) + 1$ pro $x \in (0, +\infty)$, $f'(x) = 1$ pro $x \in (-\infty, 0]$.

18. Pro $a = 1$. $f'(x) =$??

19. ??

20. $f'(x) = 1$ na $(1, +\infty)$, $f'(x) = 1 + 3x^2$ na $(0, 1)$, $f'(x) = 1$ na $(-\infty, 0)$. Dále $f'(0) = 1$, $f'_+(1) = 1$ a $f'_-(1) = 4$.

21. $f'(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\, k \in \mathbb{Z}\}$, dále ?? ($+\infty$ a $-\infty$) ??

22. $f'(x) = 2(x-1)(x^2-1) + (x-1)^2 \cdot 2x$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) = 2(x-1)(1-x^2) - (x-1)^2 \cdot 2x$ pro $x \in (-1, 1)$. Dále $f'(1) = 0$, $f'_-(-1) = -8$ a $f'_+(-1) = 8$.

23. $f'(x) = \frac{2\sin x\cos x}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dále $f'(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$.

24. $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = -\sin x$ pro $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}) + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dále $f'_+(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$, $f'_-(\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2$, $f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2$, $f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) = 0$, $f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2$, všude $k \in \mathbb{Z}$.

25. $f'(x) = e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále je $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

26. $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dále $f'_+(0) = \sqrt{2}$, $f'_-(0) = -\sqrt{2}$.

27. $f'(x) = 2x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\right)$ pro $x \neq 0$. Dále $f'(0) = 0$ (z definice)

28. $f'(x) = x^{(x^x)}\left(x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right)$ pro $x > 0$.

29. $A = 2$, $B = -4$, $C = 7$

30. $f'(x) = 1 + \frac{4\cos x}{1 + \sin^2 x}$ pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ a $f'(x) = 1$ pro $x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi)$,

$k \in \mathbb{Z}$. Dále je $f'_+(2k\pi) = 5$, $f'_-(2k\pi) = 1$, $f'_-((2k+1)\pi) = -3$, $f'_+((2k+1)\pi) = 1$.

31. $f'(x) = 3x^2$ pro $x \in (-\infty, -1)$, $f'(x) = 3x^2 + 1$ pro $x \in (-1, +\infty)$. Dále $f'_+(-1) = 4$, $f'_-(-1) = 3$.

32.-40. ?

41. $D(f) = [-1, 1]$, $f'(x) = \cos(\arccos^2 x) \cdot 2 \arccos x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1, 1)$, $f'_-(1) = -2$, $f'_+(-1) = +\infty$.

42. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. $f'(x) = \cos x$ pro $x \in ((\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi)) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in ((0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2)) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Dále je $f'(2k\pi) = 1$, $f'_+((2k+1)\pi) = 1$, $f'_-((2k+1)\pi) = -1$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

43.-51. ?

52. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2$ na $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, $f'(x) = -2x$ na $(-1, 0)$ a $f'(x) = 2x$ na $(1, +\infty)$. Dále je $f'(0) = 0$, $f'_-(-1) = f'_-(1) = 3$, $f'_+(-1) = f'_+(1) = 2$.

53. $D_f = (-1, +\infty)$, f spojitá na D_f. $f'(x) = (1 + \sqrt[3]{x})^{\sqrt[3]{x^2}} \cdot (\frac{2}{3} \cdot \frac{\log(1+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})})$ pro $x \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. Dále je $f'(0) = 1$.

54. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá v $\mathbb{R} \setminus \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$; v bodech $\{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ spojitá zprava, ale ne zleva; v bodech $\{(2k+1)\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$ spojitá zleva, ale ne zprava. Je $f'(x) = 0$ pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$; $f'(x) = -\cos x$ pro $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Konečně je $f'_+(2k\pi) = f'_-((2k+1)\pi) = 0$, $f'_-(2k\pi) = f'_+((2k+1)\pi) = +\infty$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

55. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá v $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cup \{0\}$. V bodech $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ je spojitá zprava, ale ne zleva. Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ je $f'(x) = 2x - [x]$. Pro $x \in \mathbb{Z}$ je $f'_+(x) = x$. Pro $x = 0$ je $f'_-(0) = 1$, pro $x \in \mathbb{N}$ je $f'_-(x) = -\infty$, pro $x \in \mathbb{Z}_-$ (bez nuly) je $f'_-(x) = +\infty$.

56. $D_f = [0, +\infty)$, f spojitá na D_f, $f'(x) = -\frac{1}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^2}}$ pro $x \in (0, 4) \cup (4, +\infty)$. Dále je $f'_+(0) = f'(4) = -\infty$.

57. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = (e + |x|)^x \cdot \left(\log(e + |x|) + \frac{|x|}{e+|x|}\right)$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale $f'(0) = 1$ je potřeba vypočítat zvlášť, neboť $|x|$ nemá(!) derivaci v nule, a tudíž nejsou splněny předpoklady věty o derivaci složené funkce.

58. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 1$ pro $x \in (-\infty, 1)$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ pro $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$ a $f'(x) = 2x$ pro $x \in (0, 1)$. Dále je $f'_-(-1) = 1$, $f'_+(-1) = \frac{1}{3}$, $f'_-(0) = +\infty$, $f'_+(0) = 0$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = \frac{1}{3}$.

59. $f'(x) = 2\cos x$ pro $x \in (\pi/4, 5\pi/4) + 2k\pi$, $f'(x) = -2\sin x$ pro $x \in (5\pi/4, 9\pi/4) + 2k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Dále je $f'_+(\pi/4 + 2k\pi) = \sqrt{2}$, $f'_-(\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}$, $f'_-(5\pi/4 + 2k\pi) = -\sqrt{2}$, $f'_+(5\pi/4 + 2k\pi) = \sqrt{2}$ pro každé $k \in \mathbb{Z}$.

60. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = 2(x+1)$ pro $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$, $f'(x) = -2(x+1)$ pro $x \in (-2, -1)$. Dále je $f'(-1) = 0$ a $f'(-2) = -\infty$.

61. $\alpha = \gamma = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$.

62. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x^2) \cdot \pi x$ pro $x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, $f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot \frac{\pi}{2}$ pro $x \in (0, 1)$. Dále je $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = \frac{\pi}{2}$, $f'(1) = 0$.

63.-66. ?

67. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 5$ pro $x \in (1, 4)$, $f'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$. Dále je $f'_+(1) = f'_-(4) = 5$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(4) = 8$.

68. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá v $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$ a v bodech $\{-3, 3\}$. V ostatních bodech $\mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva. $f'(x) = \frac{2}{3}x[x](x^2 - 9)^{-2/3}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Dále je $f'(3) = f'(-3) = +\infty$. Pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-3, 3\}$ je $f'_+(k) = \frac{2}{3}k^2(k^2 - 9)^{-2/3}$ a $f'_-(k) = +\infty$, pokud navíc $|k| > 3$, a $f'_-(k) = -\infty$, pokud navíc $|k| < 3$.

69. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$, f spojitá na D_f. $f'(x) = -2\sin(2x) \cdot (\operatorname{tg} x - 1) \cdot \operatorname{sgn}(\cos 2x) + |\cos 2x| \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \cup (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Dále je $f'(\frac{\pi}{4} + k\pi) = 0$, $f'_+(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = -4$, $f'_-(-\frac{\pi}{4} + k\pi) = 4$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

70. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a $f'(x) = (2x+1)^{|x-1|}(\operatorname{sgn}(x-1)\log(2x + 1) + \frac{2|x-1|}{2x+1})$ pro $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Dále je $f'_-(0) = 0$, $f'_+(0) = 2$, $f'_-(1) = -\log 3$, $f'_+(1) = \log 3$.

71. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 2x\sqrt{1+\cos(\pi x)} - \frac{\pi(x^2-1)\sin(\pi x)}{2\sqrt{1+\cos(\pi x)}}$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k+1;\, k \in \mathbb{Z}\}$. Dále je $f'(1) = f'(-1) = 0$ a $f'_-(2k+1) = -2\sqrt{2}k(k+1)\pi$, $f'_+(2k+1) = 2\sqrt{2}k(k+1)\pi$ pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0\}$.

72. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = (x^2)^x(\ln x^2 + 2)$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) = 0$ pro $x \in (-1, \frac{1}{2})$ a $f'(x) = (2x)^x(\ln 2x + 1)$ pro $x \in (\frac{1}{2}, 2)$. Dále je $f'_-(-1) = 2$, $f'_+(-1) = 0$, $f'_-(\frac{1}{2}) = 0$, $f'_+(\frac{1}{2}) = 1$, $f'_-(2) = 16(\log 4 + 1)$, $f'_+(2) = 16(\log 4 + 2)$.

73. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{2^{x^2-2x}(x-1)\ln 2}{\sqrt{2^{x^2-2x} - \frac{1}{2}}}$ pro $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Dále je $f'_+(1) = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$, $f'_-(1) = -\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$.

74. $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá na $\mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 - 4x$ pro $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, $f'(x) = 2x$ pro $x \in (-1, 2)$. Dále je $f'_-(-1) = 7$, $f'_+(-1) = -2$, $f'(2) = 4$.