1. Úvodní cvičení - Opakování středoškolské látky a trigonometrickych funkci

Příklad 1.1. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x+3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 1.2. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x|-1|-1|-1|$.

Příklad 1.3. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$.

Příklad 1.4. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 1.5. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$, $\qquad ||a|-|b|| \leq |a-b|$.

Příklad 1.6. Řešte (ne)rovnice:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin x,\\
2\sin x + \cos x &= 1,\\
\log(x^2+1) &= 2\log(3-x)\\
\sqrt{x^2+2x-3} &\geq \sqrt{x^2+3x-4}\\
\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5} &= 1\\
||x-3|-2| &= 1\\
\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+2\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

Příklad 1.7. Vyřešte

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-3} &\geq \sqrt{x^2+3x-4}\\
\sqrt{x-2}-\sqrt{x-5} &= 1\\
||x-3|-2| &= 1\\
\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+2\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

Příklad 1.8. Vyreste cviceni 1,2,3,4,5,6 Dr Kuncove `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2425ZS_MA1/01.pdf`.

2. Dukaz indukci

Příklad 2.1. Dokažte následující formulky pro $a \neq 0, 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2 \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}..$$

Příklad 2.2. Dokažte matematickou indukcí:

i). $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

ii). $(1+x)^n \geq (1+nx),$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x > -1$.

Příklad 2.3.

(i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!

(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

Příklad 2.4. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Příklad 2.5. Dokažte binomickou větu, tj. dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Příklad 2.6. Spoctete

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

Příklad 2.7. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí:

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

3. Dukazy, Vyroky a Zobrazeni

Příklad 3.1. Dokažte pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí : a) $|x+y| \leq |x|+|y|$, b) $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

Příklad 3.2. Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 > 0$.
2. $\forall x \in (0, \infty)\ \exists y \in \mathbb{N}\ [(y \leq x) \wedge (y+1 > x)]$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\ [(y \leq x) \wedge (y+1 > x)]$.
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ [(0 < |x-1| < \delta) \Rightarrow (|x-3| < \varepsilon)]$.

Příklad 3.3. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ (z > x \implies y < z)$$
$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1);$$
$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x-\alpha| < 1).$$

Příklad 3.4. Nechť M značí množinu všech mužů a Z značí množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové funkce:

$S(m, z)$: "Muž m je manželem ženy z."
$L_1(m, z)$: "Muž m miluje ženu z."
$L_2(m, z)$: "Žena z miluje muže m."

Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem L_1, L_2 a S vyjádřete následující tvrzení:

(1) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
(2) Každou ženu miluje nějaký muž.
(3) Existují nevěrné manželky.

Příklad 3.5.
(i) Dokažte, že $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?

Příklad 3.6. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset Y$. Dokažte, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ a } f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Příklad 3.7. Mějme 3 množiny A, B a X. Dokažte

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ a } X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

Příklad 3.8. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ a } f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Příklad 3.9. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ sečtěte výraz $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

4. Suprema a infima

Příklad 4.1. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

- $A = [0, 1)$
- $B = \left\{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $C = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $D = \left\{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $E = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}; n \in \mathbb{N}\right\}$.
- $F = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,
- $G = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
- $H = \{\sin x \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}$
- $I = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
- $J = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $K = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.
- $L = \left\{q \in \mathbb{Q};\ q < \sqrt{3}\right\}$,

Teoretický Příklad 4.2. Mějme zadané množiny $A, B \subset \mathbb{R}$, pro které existují $s_A = \sup A$, $i_A = \inf A$, $s_B = \sup B$ a $i_B = \inf B$. Co můžete obecně říci o supremu S a infimu I množin

(1) $A \cup B$,
(2) $A \cap B$,
(3) $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$,
(4) $A \setminus B = \{a \in A,\ a \notin B\}$?

Teoretický Příklad 4.3. Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Dokažte:

- Jsou-li f a g shora omezené, potom $\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$.
- Jsou-li f a g zdola omezené, potom $\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M)$.

Muze se nastat pripad kdy je

$$\sup(f+g)(M) < \sup f(M) + \sup g(M),$$

resp.

$$\inf(f+g)(M) > \inf f(M) + \inf g(M)?$$

Teoretický Příklad 4.4. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

- $\forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A$,
- $\forall B \subset L : f(f^{-1}(B)) = B$.

5. Mohutnost mnozin

Teoretický Příklad 5.1. Porovnejte mohutnosti množin

(1) $\mathbb{N}$,
(2) $\mathbb{Z}$,
(3) $\mathbb{Q}$,
(4) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$,
(5) $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,
(6) $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]^2$,
(7) $P_{0-9} :=$ {množina všech posloupností v mnozine $\{0,1,\ldots,9\}$},
(8) $P_{01} :=$ {množina posloupností nul a jedniček},
(9) $K :=$ {množina konečných podmnožin $\mathbb{N}$}.

Teoretický Příklad 5.2. Dokažte následující tvrzení:

(1) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
(2) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
(3) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
(4) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Těžký Příklad 5.3. Sestrojte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbb{N}$ takových, že každé dvě mají jen konečný průnik.

6. Skala funkci a limita posloupnosti dle definice

Definice. Necht a_n, b_n jsou realne posloupnosti. Definujeme relaci $\ll$ nasledovne; pokud plati,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

pak piseme, ze $a_n \ll b_n$.

Příklad 6.1. Dokažte, že pro $0 < p < q < \infty$ a pro $0 < \alpha < \beta$, ze

$$1 \ll \big(\ln n\big)^p \ll \big(\ln n\big)^q \ll n^p \ll n^q \ll e^{\alpha n} \ll e^{\beta n} \ll n! \ll n^n$$

a tim padem dokazte, ze

$$n^{-n} \ll \frac{1}{n!} \ll e^{-\beta n} \ll e^{-\alpha n} \ll n^{-q} \ll n^{-p} \ll \big(\ln n\big)^{-q} \ll \big(\ln n\big)^{-p} \ll 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad a > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = 0 \quad b > a > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \quad k > 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \quad p > 0$$

Navod pro $\frac{n^p}{a^n}$.

Najdeme $k \in \mathbb{N}$ $k \geq p$. Použijeme $2k$ krát větu o limitě součinu a dostaneme

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\left(a^{\frac{1}{2k}}\right)^n} \right)^{2k}.$$

Tedy stačí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{b^n} = 0 \text{ pro } b > 1.$$

Policajti

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{(1 + (b-1))^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1 + n(b-1)} \to 0.$$

Příklad 6.2. Pro jaké n je $n > K$ jestlíže $K = 10, 100, 1000, 10000$?

Obecneji, pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n > K$ pro $K \in \mathbb{R}$?

Pomocí předchozímu vypočtu dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Návod: Jestlíže $K \in \mathbb{R}$ dané, chcete najít index $N \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq N, n > K$.

Příklad 6.3. Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 > 10, 400, 1600$?

Obecneji, pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 > K$ pro $K \in \mathbb{R}$?

Pomocí předchozímu vypočtu dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Návod:

- Zaprvé $K \in \mathbb{R}$ dané, chcete najít index $N \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq N, n^2 > K$,
- zadruhé pomoci předchozímu příkladu a vztahu $n^2 \geq n$.

Příklad 6.4. Počítejte následující limitu podle definice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13}{\sqrt{n}}.$$

Návod: Měli byste být schopni tipnout že limita bude 0. Dokažte, že posloupnost je klesající. Pro $\varepsilon > 0$ dané algebraickymi uporavami najdete $N \in \mathbb{N}$ takové, že výraz je menší než ε.

Příklad 6.5. Počítejte následující limitu podle definice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8}.$$

Návod: Měli byste být schopni tipnout že limita bude 0. Postupujeme pomoci vety o dvou policajtech. Tím pádem chceme výraz zjednodušit tím, že ho zvětšíme (ale ne příliš moc), jen aby se s tím lépe pracovalo. Jeden návrh může být $7n^3 < 10n^4$ a pak výraz prodělit $10n^4$. Toto vím že nemění konvergence posloupnosti, protože v jmenovateli je stejně podstatný exponent roven 8, což je větší než 4. Pak dokažte, že zbytek jde k nule. A to tím, že píšete, že posloupnost je klesající a pro $\varepsilon > 0$ dané najdete $N \in \mathbb{N}$ takové, že nový výraz $\frac{2}{n^4} < \varepsilon$. Jiná možnost je věta o součtu limit, kde obě limity jsou 0. Tady ovšem chci, abyste pro $\varepsilon > 0$ našli N z definice limity.

Dalsi cviceni,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n\sin(n^2)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{(n^2)}}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n^2 + \pi^2 n + \pi^3}{en^2 - \pi^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}$$ (Návod v poznámkách, jsme jíž na cvičení udělali)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n^2)!}$$

7. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 7.1. Pomoci vety o aritmetice limit vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}.$$

Příklad 7.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}.$$

Příklad 7.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}\text{ pro }|a|<1\text{ a }|b|<1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n},\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left[(n+2)^2-(n+1)^2\right]^{n+1}}{\left[(n+1)^3-n^3-3n^2\right]^{n-1}}}.$$

Příklad 7.4. Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right)$ pro $a>b>0$.

8. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 8.1. Spočtěte limity:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 8.2. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}),\qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 8.3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Příklad 8.4. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right).$$

Příklad 8.5. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

9. Rekurentně zadané posloupnosti

Příklad 9.1. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \text{ a } a_1 = 10$$

Příklad 9.2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$$

Příklad 9.3. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big) \text{ a } a_1 > 0,$$

Příklad 9.4. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

Příklad 9.5. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

Teoretický Příklad 9.6. Nechť jsou posloupnosti x_n a y_n divergentní. Je možné říci, že posloupnosti $x_n + y_n$ nebo $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Teoretický Příklad 9.7. Nechť $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nebo $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?

Těžký Příklad 9.8. Nechť $a_1 < a_2$ jsou zadané a $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 3$, je rekurentně zadaná. Ukažte, že existuje limita a spočtěte ji.

10. Těžší přiklady

Příklad 10.1. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+2)! - (n+1)!}$$

Příklad 10.2. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} \text{ pro } a > 0$$

Příklad 10.3. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3} + \sqrt{n} + 1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{(n^4+n)^{50} - (n+1)^{200}}{(n+1)^{202} - n^{202}}$$

Příklad 10.4. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!},$$

Příklad 10.5. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n 2^n + \sqrt[2n]{n}}{(-1)^n 3^n + \sqrt[3n]{n}}}.$$

Teoretický Příklad 10.6. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{0, 1, 3\}$.

Těžký Příklad 10.7.

(1) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0, 1]$.

(2) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0, \infty]$.

(3) Může být množina hromadných bodů rovna $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$?

11. Limity funkcí

Příklad 11.1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

Příklad 11.2. Spočtěte

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Příklad 11.3. Spočtěte

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$$

Příklad 11.4. Spočtěte

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x}{[x]}$$

Příklad 11.5. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

Příklad 11.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 11.7. Spočtěte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}.$$

Teoretický Příklad 11.8. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=A \text{ a } \lim_{x\to a-} f(x)=A.$$

Teoretický Příklad 11.9. Limes superior a limes inferior pro funkce je definován jako

$$\liminf_{x\to a} f(x)=\lim_{\delta\to 0+} \inf f(P(a,\delta)) \text{ a } \limsup_{x\to a} f(x)=\lim_{\delta\to 0+} \sup f(P(a,\delta)).$$

Dokažte, že

$$\liminf_{x\to a}(f(x)+g(x)) \geq \liminf_{x\to a} f(x)+\liminf_{x\to a} g(x)$$

a

$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x)) \leq \limsup_{x\to a} f(x)+\limsup_{x\to a} g(x).$$

Teoretický Příklad 11.10. Dokažte, že

$$\text{Existuje } \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \liminf_{x\to a} f(x)=\limsup_{x\to a} f(x).$$

12. Limity funkcí

Příklad 12.1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$$

Příklad 12.2. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

Příklad 12.3. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Příklad 12.4. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Příklad 12.5. Spočtěte

$$\lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-3x+2}\Big).$$

Příklad 12.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \text{ pro } m,n\in\mathbb{N}.$$

Příklad 12.7. Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}.$$

Příklad 12.8. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 12.9. Spočtěte

$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

Teoretický Příklad 12.10. Nechť $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

(1) f,g jsou omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je omezená.
(2) f,g jsou shora omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je shora omezená. f,g jsou rostoucí $\Rightarrow f\cdot g$ je rostoucí .

Teoretický Příklad 12.11. Dokažte, že Riemannova funkce

$$D(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q} \text{ pro } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbb{N} \text{ nesoudělná}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

je spojitá na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Teoretický Příklad 12.12. Dokažte si větu, že jedna děleno "kladná nula" je ∞. Nechť $\lim_{x\to a} g(x)=0$ a existuje $\delta>0$ tak, že $g(x)>0$ na $P(a,\delta)$. Pak $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$.

13. Zapoctova Pisemka

Zapoctova pisemka muze vypadat nejak takto

Příklad 13.1 (Za 6 bodu)**.**
Spoctete limitu a overte z definice hodnotu limity

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\log n}$$

Příklad 13.2 (Za 6 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + n + 17}$$

Příklad 13.3 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^{n+1}}{3^{n-1} + n!}$$

. Podrobne oduvodnete vsechny limity.

Příklad 13.4 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2 - 10\sqrt{n})}{\log\big(\log(2^n + 100n)\big)}.$$

Teoretický Příklad 13.5 (Za 8 bodu)**.**
Rozhodnete o platnosti nasledujicich tvrzeni (tedy je dokazte, nebo sestrojte protipriklad):

i)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} \Rightarrow \Big(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \wedge \exists \lim_{n\to\infty} b_n\Big)$$

ii)

$$\Big(\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}\Big) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{A, B\}.$$

14. Limita funkce

Příklad 14.1. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 14.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

Příklad 14.3. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 14.4. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Příklad 14.5. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 14.6. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}.$$

15. Trochu těžší příklady - limity funkci

Příklad 15.1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Příklad 15.2. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Příklad 15.3. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 15.4. Spočtěte

$$\lim_{x\to \infty} x\big(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\big).$$

Příklad 15.5. Spočtěte

$$\lim_{x\to \infty} \log\big(1+2^x\big)\log\Big(1+\frac{3}{x}\Big).$$

Příklad 15.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

Příklad 15.7. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{\tan x}.$$

Teoretický Příklad 15.8. Sestrojte spojitou funkci $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, která není monotónní na žádném intervalu.

16. Trochu těžší příklady - limity funkci

Příklad 16.1. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n.$$

Příklad 16.2. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e^x)}{\log(x^4+e^{2x})}.$$

Příklad 16.3. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\tan x}.$$

Příklad 16.4. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\sin\bigl(2\pi\sqrt{n^2+1}\bigr).$$

Příklad 16.5. Spočtěte

$$\lim_{x\to 1}\bigl(1+\sin(\pi x)\bigr)^{\operatorname{cotg}(\pi x)}.$$

Příklad 16.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} x\Bigl(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\Bigr).$$

Příklad 16.7. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0+} x\log x.$$

17. Derivace funkce

Příklad 17.1. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$x^2 e^{-x^2}.$$

Příklad 17.2. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$\log\Big(\frac{x^2-1}{x^2+1}\Big).$$

Příklad 17.3. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$f(x) = x^2 \sin\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big) \text{ pro } x \neq 0 \text{ a } f(0) = 0.$$

Příklad 17.4. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$\log(\log \sin x).$$

Příklad 17.5. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$x^{\log x}$$

Příklad 17.6. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$\arccos(1-x^2)$$

Příklad 17.7. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace

$$x^{x^x}$$

Příklad 17.8. Pro funkci $f(x) = \arcsin x - \arccos(\sqrt{1-x^2})$ dokažte, že $f(0) = 0$ a spočtěte $f'_+(0)$ a $f'_-(0)$.

Příklad 17.9. Dokažte, že

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \text{ pro } x \neq 0.$$

Příklad 17.10. Dokažte, že

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Teoretický Příklad 17.11. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy sestrojte protipříklad, nebo to dokažte či odkažte na větu z přednášky):

(i) $\exists f'(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ je v 0 spojitá.

(ii) $\exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f$ je v 0 spojitá.

(iii) f je v 0 spojitá $\Rightarrow \exists f'(0) \in \mathbb{R}^*$.

Teoretický Příklad 17.12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $f'(x)$ existuje vlastní pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

18. Derivace funkce v problémových bodech

Příklad 18.1. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$x^2 \exp(-|x-1|)$$

Příklad 18.2. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\max\bigl\{\min\{\cos x, \bigl(\tfrac{1}{2}\bigr)\}, \bigl(-\tfrac{1}{2}\bigr)\bigr\},$$

Příklad 18.3. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\frac{\sin x}{\sin\bigl(x+\frac{\pi}{4}\bigr)}.$$

Příklad 18.4. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Příklad 18.5. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan^2 x\right) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Příklad 18.6. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\sqrt{1-e^{-x^2}}.$$

Příklad 18.7. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Příklad 18.8. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Příklad 18.9. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\max\bigl\{x + 4\arctan(\sin x), x\bigr\}.$$

Příklad 18.10. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují

$$\arcsin(\sin x).$$

Teoretický Příklad 18.11. Nechť f je rostoucí funkce na $(-1,1)$, která má derivaci ve všech bodech $(-1,1)$. Musí platit $f'(0) > 0$?

Teoretický Příklad 18.12. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'(0)$?

Teoretický Příklad 18.13. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'_+(0)$?

19. Taylorův polynom 1

Příklad 19.1. Nalezněte Taylorův polynom stupně 4 pro funkci f v bodě 0, kde

$$f(x) = \tan x.$$

Příklad 19.2. Nalezněte Taylorův polynom stupně 3 pro funkci f v bodě 1, kde

$$f(x) = x \log x.$$

Příklad 19.3. Nalezněte Taylorův polynom stupně 5 pro funkci f v bodě 0, kde

$$f(x) = \cos(\sin x).$$

Příklad 19.4. Spoctete

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Příklad 19.5. Spoctete

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}.$$

Příklad 19.6. Spoctete

$$\lim_{n\to\infty} n^4\big(\cos\tfrac{1}{n} - e^{-\frac{1}{2n^2}}\big).$$

Příklad 19.7. Nalezněte $k \in \mathbb{N}$, aby

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \tan x}{x^k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Příklad 19.8. Nalezněte $k \in \mathbb{N}$, aby

$$\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\big) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teoretický Příklad 19.9. Nechť $k, l \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí

$$(i)\ x^k o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad (ii)\ o(x^k)o(x^l) = o(x^{k+l})$$
$$(iii)\ o(x^k) + o(x^l) = o(x^{min\{k,l\}}), \quad (iv)\ o(x^k + o(x^l)) = o(x^k) \text{ pro } k < l.$$

20. Taylorova veta a l'Hospitalovo pravidlo

Nechť $a > 0$ a $b > 0$. Spočtěte následující limity:

Příklad 20.1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log\cos x}{x^2}.$$

Příklad 20.2. Spočtěte pro $a > 0$ a $b > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^a n}{n^b}.$$

Příklad 20.3. Spočtěte $a > 0$ a $b > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{an}}{n^b}.$$

Příklad 20.4. Spočtěte $a > 0$ a $b > 0$

$$\lim_{n\to\infty} |\log\frac{1}{n}|^a \frac{1}{n^b}.$$

Příklad 20.5. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x}.$$

Příklad 20.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Příklad 20.7. Spočtěte

$$lim_{x\to 0}(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}).$$

Příklad 20.8. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{\arctan x}{x}\Big)^{\frac{1}{x^2}}$$

21. Průběh funkce 1

Příklad 21.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$
$$f(x) = \log_x e;$$
$$f(x) = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|;$$
$$f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$
$$f(x) = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Příklad 21.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$
$$f(x) = (\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x},$$
$$f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|,$$

Příklad 21.3. Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x,$$
$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2-1},$$

$$1.|x| + \arctan(|x-1|), \quad 2.\frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}, \quad 3.|(1-x^2)e^{-x}|.$$

Příklad 21.4. Dokažte (například vyšetřením vhodného průběhu funkce), že platí:

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$
$$\sin x \leq x \qquad \text{pro všechna } x \in [0,\infty),$$
$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$
$$\sin x + \tan x > x \qquad \text{pro všechna } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Příklad 21.5. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|\sin x - \sin y| \leq |x-y| \text{ a } |\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

Teoretický Příklad 21.6. Dokažte, že funkce je konvexní na intervalu I, právě tehdy, když

$$\forall x, y \in I,\ \forall \alpha \in (0,1):\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

22. Zapoctova pisemka

Zapoctova pisemka muze vypadat nejak takto

Příklad 22.1 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete derivaci (popr jednostranne derivaci) funkce

$$f(x) = \log(1 + |x^2 - 3x|)$$

Příklad 22.2 (Za 15 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(\operatorname{tg} 3x)^2} - 1}{\arcsin(3x^2)}$$

Příklad 22.3 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\Big)^{n^2}.$$

Teoretický Příklad 22.4 (Za 10 bodu)**.**
Rozhodnete o platnosti nasledujicich tvrzeni (tedy je dokazte, nebo sestrojte protipriklad): Necht $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce

i)

$$\exists K > 0 \forall x \in [-1, 1]; -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2 \Rightarrow \exists f'(0)$$

ii)

$$\exists f'(0) \Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in [-1, 1]; -Kx^2 \leq f(x) \leq Kx^2.$$

23. Průběh funkce 2

Vysetrit prubeh funkce znamena

(1) Naleznete definicni obor funkce f totiz $\mathcal{D}_f$.
(2) Overte zda-li neni funkce f suda nebo licha (popr. zda-li nema podobnou symmetrii) a zdali neni periodicka.
(3) Rici, kde je funkce f spojita a kde ma body nespojitosti.
(4) Naleznete limitou chovani funkce f na krajnich bodech intervalu spojitosti a u $\pm\infty$
(5) Spoctete f'
(6) Naleznete intervaly monotonie funkce f
(7) Spoctete f''.
(8) Najdete intervaly konvexity a konkávity funkce f
(9) Najdete lokální extrémy a inflexní body funkce f
(10) Naleznete obor hodnot funkce $\mathcal{H}(f)$
(11) Narcnete graf funkce f, ktery zobrazuje souhrn zjistenych informaci

Příklad 23.1. Vyšeřte prubeh funkce

$$\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^2+1}{x^2-1}\Big).$$

Příklad 23.2. Vyšeřte prubeh funkce

$$(x+2)e^{1/x}.$$

Příklad 23.3. Vyšeřte prubeh funkce

$$\sin x - |\cos x|.$$

Příklad 23.4. Vyšeřte prubeh funkce

$$(x^2-3x+2)e^{|x+3|-3}.$$

Teoretický Příklad 23.5. Nechť $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je konvexní. Může být f nediferencovatelná

(1) na nekonečné množině?
(2) ve všech bodech $\mathbb{Q}$?
(3) v nespočetně mnoha bodech?

24. Z písemek z minulých let

Příklad 24.1. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

Příklad 24.2. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n+5^n)\Big(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1}\Big)$$

Příklad 24.3. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{(3+x)^x + (2+x)^x}{2}\Big)^{\frac{1}{x}}$$

Příklad 24.4. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{1-\cos x}$$

Příklad 24.5. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\log n}{\log(n+1)}\Big)^{n\log(n+2)}$$

Příklad 24.6. Spočtěte

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x + \frac{2\log(\cos x)}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

Příklad 24.7. Určete pro které $k \in \mathbb{N}$ je následující limita vlastní a spočtěte ji

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{20} - (n+1)^{40}}{(n^k+2)^{10} - (n+1)^{30}}.$$

Příklad 24.8. Spočtěte průběh funkce

$$8.\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{1+2x}} & \text{pro } x \neq -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$