1. Úvodní cvičení - Opakování středoškolské látky a trigonometrickych funkci

Příklad 1.1. Vyreste cviceni 1,2,3,4,5,6 Dr Kuncove `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/2425ZS_MA1/01.pdf`.

Příklad 1.2. Řešte následující nerovnice v $\mathbb{R}$:

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \qquad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \qquad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

Příklad 1.3. Nakreslete graf funkce $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$.

Příklad 1.4. Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

Příklad 1.5. Vyjádřete $\cos 5x$ (resp. $\sin 5x$) pouze pomocí funkcí $\cos x$ a $\sin x$.

Příklad 1.6. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$: $|a + b| \leq |a| + |b|, \qquad ||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Příklad 1.7. Řešte rovnice:

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2\sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2\log(3 - x).$$

Výsledky

- Příklad 1.2: $(4,6\rangle$; $\langle 1,2\rangle$; $(-6,-3)\cup\Big((-1-\sqrt{13})/2,(-1+\sqrt{13})/2\Big)$
- Příklad 1.4: $D(f)=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$, $H(f)=(-\infty,-1]\cup(0,1]$.
- Příklad 1.5: Použijeme-li Moivreovu větu nebo součtové vzorce dostaneme:
$$\cos 5x=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x,$$
$$\sin 5x=5\cos^4 x\sin x-10\cos^2 x\sin^3 x+\sin^5 x.$$
- Příklad 1.6: První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.
- Příklad 1.7: 1. rovnice: $x=k\pi$ nebo $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$ nebo $x=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$; 2. rovnice: $x=2k\pi$ nebo $x=\pi-\arcsin(4/5)+2k\pi$, kde $k\in\mathbb{Z}$; 3. rovnice: $4/3$

2. Úvodní cvičení - Opakování, Logika a dukazy

Příklad 2.1. Dokažte následující formulky:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+3+\cdots+n)^2.$$

Příklad 2.2. Dokažte matematickou indukcí:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2,$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
4. $(1+x)^n \geq (1+nx),$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $x > -1$.

Příklad 2.3. (i) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $n \leq 2^n$. Dokažte!
(ii) Pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 3$, platí $n^2 \leq 2^n$. Dokažte!

Příklad 2.4. Dokažte, že následující vztahy platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1};$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Příklad 2.5. Spoctete

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

Těžký Příklad 2.6. Dokažte, že pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, platí:

$$(n+1)^n \leq n^{n+1}.$$

Příklad 2.7. Vyřešte

$$\sqrt{x^2+2x-3} \geq \sqrt{x^2+3x-4}$$

$$\sqrt{x-2} - \sqrt{x-5} = 1$$

$$||x-3|-2| = 1$$

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-3x+2\right) \geq 0$$

Příklad 2.8. Mějme zadanou funkci $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$. Nalezněte definiční obor D_f, inverzi f^{-1} a obor hodnot H_f.

Příklad 2.9. Znegujte následující výroky a rozhodněte, jestli platí výrok, nebo jeho negace:

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 > 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\ [(y \leq x) \wedge (y+1 > x)]$.
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ [(0 < |x-1| < \delta) \Rightarrow (|x-3| < \varepsilon)]$.

Teoretický Příklad 2.10. Dokazte platnost:

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Z}\ [(y \leq x) \wedge (y+1 > x)].$$

Výsledky a navody

- Příklad 2.1: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 2.2

$$2. \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 + (n+1)^2,$$
$$3. 2^{n+1} \geq 2n^2 \geq (n+1)^2,$$

$4. (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) \geq (1+(n+1)x),$

- Příklad 2.3: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 2.5: Použijte binomickou větu na výrazy $(1+1)^{2n}$ a $(1-1)^{2n}$. Výsledek: 2^{2n-1}.
- Příklad 2.6: Použijte matematickou indukci nebo aplikujte binomickou větu na $(n+1)^n$ a pak odhadněte členy binomického rozvoje.
- Příklad 2.7 1. $(-\infty,-4] \cup \{1\}$ 2. $x = 6$ 3. $x \in \{0,2,4,6\}$. 4. $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right) \cup \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$ z $0 < x^2 - 3x + 2 \leq 1$.
- Příklad 2.8 $D_f = [0,\infty) \setminus \{16\}$, $f^{-1}(y) = \left(\frac{4y}{y+2}\right)^2$ pro $y \in H_f$ a $H_f = (-\infty,-2) \cup [0,\infty)$.
- Příklad 2.9. Negace;

  1. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 0.$
  2. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{N}\ [(y > x) \vee (y + 1 \leq x)].$
  3. $\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in \mathbb{R}\ [(0 < |x-1| < \delta) \wedge (|x-3| \geq \varepsilon)].$

  U všech tří výroků platí negace. 1. vol $x = y = 0$. 2. vol $x = -1$, nelze najít $y \in \mathbb{N}$. 3. vol $\varepsilon = 1$ a po zadání libovolného $\delta > 0$ vol $x = 1 - \frac{\delta}{2}$.

3. Metody dukazu a zobrazeni

Příklad 3.1. Dokažte pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí : a) $|x+y| \leq |x| + |y|$, b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Příklad 3.2. (i) Dokažte, že $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.
(ii) Pro která $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$?
(iii) Dokažte pomocí vhodného protipříkladu, že neplatí výrok

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

(iv) Nyní dokažte, že neplatí ani výrok

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n < 41: \quad n^2 + n + 41 \quad \text{je prvočíslo.}$$

Příklad 3.3. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset Y$. Dokažte, že

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \text{ a } f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B).$$

Příklad 3.4. Mějme 3 množiny A, B a X. Dokažte

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \text{ a } X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B).$$

Příklad 3.5. Nechť f je zobrazení z X do Y a $A, B \subset X$. Rozhodněte, zda platí

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \text{ a } f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B).$$

Příklad 3.6. Dokažte binomickou větu, tj. dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a pro každá $a, b \in \mathbb{R}$ platí

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Příklad 3.7. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{R}$ sečtěte výraz $\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$

Příklad 3.8. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}: \ (z > x \implies y < z)$$
$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1);$$
$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}: (x \in (a, a+\varepsilon) \iff |x - \alpha| < 1).$$

Příklad 3.9. Nechť M značí množinu všech mužů a Z značí množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové funkce:

$S(m, z)$: "Muž m je manželem ženy z."

$L_1(m, z)$: "Muž m miluje ženu z."

$L_2(m, z)$: "Žena z miluje muže m."

Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem L_1, L_2 a S vyjádřete následující tvrzení:

(1) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
(2) Každou ženu miluje nějaký muž.
(3) Existují nevěrné manželky.

Těžký Příklad 3.10. Dokažte, že pro všechna $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ platí

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}\ .$$

Navody a vysledky

- Příklad 3.1, návod: a) Bez újmy na obecnosti $x \geq 0$. Pokud $y \geq 0$, tak jistě $x+y \leq x+y$. Pokud $y \leq 0$, tak jistě platí $x+y \leq x-y$ i $-x-y \leq x-y$.
- Příklad 3.2: Použijte matematickou indukci.
- Příklad 3.3, návod na b. $x \in f^{-1}(A \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in A \setminus B \Leftrightarrow f(x) \in A$ a $f(x) \notin B \Leftrightarrow \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ a $x \notin f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.
- Příklad 3.4, návod na 4.a) $x \in X \setminus (A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \cap B) \Rightarrow (x \in X) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \Rightarrow (x \in X \wedge x \notin A) \vee (x \in X \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.
- Příklad 3.5, návod na a) platí
$$\begin{aligned} x \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists y \in A \cup B, f(y) = x \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in A, f(y) = x) \vee (\exists y \in B, f(y) = x) \\ &\Leftrightarrow (x \in f(A)) \vee (x \in f(B)) \Leftrightarrow x \in f(A) \cup f(B). \end{aligned}$$
  b) a c) neplatí - stačí konstantní funkce. Například u b) platí jen tato implikace
$$\begin{aligned} x \in f(A \cap B) &\Leftrightarrow \exists y \in A \cap B, f(y) = x \\ &\Rightarrow (\exists y_1 \in A, f(y_1) = x) \text{ a } (\exists y_2 \in B, f(y_2) = x) \\ &\Leftrightarrow (x \in f(A)) \text{ a } (x \in f(B)) \Leftrightarrow x \in f(A) \cap f(B). \end{aligned}$$
- Příklad 3.6, návod: Matematická indukce, využije se vztahu
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$
  .
- Příklad 3.7, návod: Lze použít Moivreovu větu a vzorec pro součet geometrické řady. Dostaneme 0 pro $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pro ostatní x máme výsledek
$$\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$
  Lze to dokázat i indukcí.
- Příklad 3.10, návod: Dokazujte matematickou indukcí 1. krok pro $n = 1$. 2. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $2n$. 3. krok z tvrzení pro n plyne tvrzení pro $n-1$. Hint - zkuste volit $x_n = \sqrt[n-1]{x_1 \cdots x_{n-1}}$.

4. Suprema a infima

Příklad 4.1. Zjistěte, zda následující množiny mají supremum a infimum. Pokud ano, určete je.

- $A = \left\{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $B = \left\{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $C = \left\{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$,
- $D = \left\{q \in \mathbb{Q};\ q < \sqrt{3}\right\}$,
- $E = \{\sin x \cos x;\ x \in \mathbb{R}\}$
- $F = [0, 1)$
- $G = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

Teoretický Příklad 4.2. Charakterizujte zobrazení $f : M \to L$, pro která platí

- $\forall A \subset M : f^{-1}(f(A)) = A$,
- $\forall B \subset L : f(f^{-1}(B)) = B$.

Příklad 4.3. Nalezněte suprema a infima následujících množin (pokud existují):

- $A = \{p/(p+q);\ p \in \mathbb{N},\ q \in \mathbb{N}\}$,
- $B = \{\sin x;\ x \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$,
- $C = \{n^2 - m^2;\ n \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\}$,
- $D = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$,
- $E = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Teoretický Příklad 4.4. Mějme zadané množiny $A, B \subset \mathbb{R}$, pro které existují $s_A = \sup A$, $i_A = \inf A$, $s_B = \sup B$ a $i_B = \inf B$. Co můžete obecně říci o supremu S a infimu I množin

1. $A \cup B$,
2. $A \cap B$,
3. $A + B = \{a + b,\ a \in A, b \in B\}$,
4. $A \setminus B = \{a \in A,\ a \notin B\}$?

Teoretický Příklad 4.5. Nechť M je neprázdná množina a $f\colon M \to \mathbb{R}$ a $g\colon M \to \mathbb{R}$ jsou funkce. Dokažte:

- Jsou-li f a g shora omezené, potom $\sup(f+g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$.
- Jsou-li f a g zdola omezené, potom $\inf(f+g)(M) \geq \inf f(M) + \inf g(M)$.

Muze se nastat pripad kdy je

$$\sup(f+g)(M) < \sup f(M) + \sup g(M),$$

resp.

$$\inf(f+g)(M) > \inf f(M) + \inf g(M)?$$

Výsledky

- Příklad 4.1: $\sup A = 0$, $\inf A = -1$;
  $\sup B = \frac{3}{2}$, $\inf B = 0$;
  $\sup C$ neexistuje, $\inf C = 0$;
  $\sup D = \sqrt{3}$, $\inf D$ neexistuje;
  $\sup E = \frac{1}{2}$, $\inf E = -\frac{1}{2}$;
  $\sup F = 1$, $\inf F = 0$.
  $\sup G = 1$, $\inf G = 0$.
- Příklad 4.2 a) proste, b) na.
- Příklad 4.3: $\sup A = 1$, $\inf A = 0$;
  $\sup B = 1$, $\inf B = -1$;
  $\sup C = \infty$ nebo neexistuje, $\inf C = -\infty$ nebo neexistuje
  $\sup D = \frac{5}{6}$, $\inf D = 0$;
  $\sup E = \infty$ nebo neexistuje, $\inf E = 0$;
- (1) $S = \max\{s_A, s_B\}$ a $I = \min\{i_A, i_B\}$
  (2) Pokud $A \cap B \neq \emptyset$, pak $S \leq \min\{s_A, s_B\}$, $I \geq \max\{i_A, i_B\}$ a více říci nelze
  (3) $S = s_A + s_B$ a $I = i_A + i_B$
  (4) Pokud $A \setminus B \neq \emptyset$, pak $S \leq s_A$, $I \geq i_A$ a obecně více říci nelze

5. Mohutnost mnozin

Teoretický Příklad 5.1. Porovnejte mohutnosti množin

(1) $\mathbb{N}$,
(2) $\mathbb{Z}$,
(3) $\mathbb{Q}$,
(4) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$,
(5) $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,
(6) $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]^2$,
(7) $P_{0-9} :=$ {množina všech posloupností v mnozine $\{0,1,\dots,9\}$},
(8) $P_{01} :=$ {množina posloupností nul a jedniček},
(9) $K :=$ {množina konečných podmnožin $\mathbb{N}$}.

Teoretický Příklad 5.2. Dokažte následující tvrzení:

(1) Podmnožina spočetné množiny je spočetná.
(2) Sjednocení spočetně mnoha spočetných množin je spočetné.
(3) Obraz spočetné množiny je spočetná množina.
(4) Každá nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Těžký Příklad 5.3. Sestrojte nespočetně mnoho podmnožin $\mathbb{N}$ takových, že každé dvě mají jen konečný průnik.

Výsledky

- Příklad 5.1; mnoziny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, K jsou spoectene zatimco $\mathcal{P}(0-9)$, $\mathbb{R}$ $[0,1]$, $(0,1)$, $[0,1)$, $[0,1]^2$, P_{01}, ale maji mensi mohutnost nez $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

  Navody

  a) $K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathbb{N}^k$ a každá z množin $\mathbb{N}^k$ je spočetná.

  b) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx P_{01}$. K dané $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ si vezmu posloupnost 0 a 1 tak, že 1 (nebo 0) na prvním mśtě říká, že 1 je (není) v a, 1 (nebo 0) na druhém mśtě říká, že 2 je (není) v a atd.

  c) $P_{01} \approx [0,1]$ - idea - Představte si zápis reálného čísla ve dvojkové soustavě.

  d) $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \approx P_{0-9}$: $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \preceq P_{0-9}$ - Množinu $a \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ zobrazím na $a \in P_{0-9}$ (to je prosté).

  $P_{0-9} \preceq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ - Množinu $a = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \in P_{0-9}$ zobrazím na $\{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ (to je prosté).

  e) $[0,1] \approx [0,1]^2$: idea - $[a,b] \in [0,1]^2$ s desetinným zápisem $a = 0,a_1a_2a_3\ldots$, $b = 0,b_1b_2b_3\ldots$ zobrazím na čislo $0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$.

6. Skala funkci a limita posloupnosti dle definice

Definice. Necht a_n, b_n jsou realne posloupnosti. Definujeme relaci $\lessapprox$ nasledovne; pokud plati,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

pak piseme, ze $a_n \lessapprox b_n$.

Příklad 6.1. Dokažte, že pro $0 < p < q < \infty$ a pro $0 < \alpha < \beta$, ze

$$1 \lessapprox \big(\ln n\big)^p \lessapprox \big(\ln n\big)^q \lessapprox n^p \lessapprox n^q \lessapprox e^{\alpha n} \lessapprox e^{\beta n} \lessapprox n! \lessapprox n^n$$

a tim padem dokazte, ze

$$n^{-n} \lessapprox \frac{1}{n!} \lessapprox e^{-\beta n} \lessapprox e^{-\alpha n} \lessapprox n^{-q} \lessapprox n^{-p} \lessapprox \big(\ln n\big)^{-q} \lessapprox \big(\ln n\big)^{-p} \lessapprox 1$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{n} = \infty & &\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0 \quad a > 1 & &\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0 \quad a > 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{b^n} = 0 \quad b > a > 1 & &\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad a > 1 \\
&\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0 & &\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \\
&\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} = 1 \quad k > 0 & &\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \quad p > 0
\end{aligned}$$

Navod pro $\frac{n^p}{a^n}$.

Najdeme $k \in \mathbb{N}$ $k \geq p$. Použijeme $2k$ krát větu o limitě součinu a dostaneme

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\big(a^{\frac{1}{2k}}\big)^n}\right)^{2k}.$$

Tedy stačí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{b^n} = 0 \text{ pro } b > 1.$$

Policajti

$$0 \leq \frac{\sqrt{n}}{(1 + (b-1))^n} \leq \frac{\sqrt{n}}{1 + n(b-1)} \to 0.$$

Příklad 6.2. Pro jaké n je $n > K$ jestlíže $K = 10, 100, 1000, 10000$?

Obecneji, pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n > K$ pro $K \in \mathbb{R}$?

Pomocí předchozímu vypočtu dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Návod: Jestlíže $K \in \mathbb{R}$ dané, chcete najít index $N \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq N, n > K$.

Příklad 6.3. Pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 > 10, 400, 1600$?

Obecneji, pro jaké $n \in \mathbb{N}$ je $n^2 > K$ pro $K \in \mathbb{R}$?

Pomocí předchozímu vypočtu dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Návod:

- Zaprvé $K \in \mathbb{R}$ dané, chcete najít index $N \in \mathbb{N}$ takový, že pro každé $n \geq N, n^2 > K$,
- zadruhé pomoci předchozímu příkladu a vztahu $n^2 \geq n$.

Příklad 6.4. Počítejte následující limitu podle definice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{13}{\sqrt{n}}.$$

Návod: Měli byste být schopni tipnout že limita bude 0. Dokažte, že posloupnost je klesající. Pro $\varepsilon > 0$ dané algebraickymi uporavami najdete $N \in \mathbb{N}$ takové, že výraz je menší než ε.

Příklad 6.5. Počítejte následující limitu podle definice

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8}.$$

Návod: Měli byste být schopni tipnout že limita bude 0. Postupujeme pomoci vety o dvou policajtech. Tím pádem chceme výraz zjednodušit tím, že ho zvětšíme (ale ne příliš moc), jen aby se s tím lépe pracovalo. Jeden návrh může být $7n^3 < 10n^4$ a pak výraz prodělit $10n^4$. Toto vím že nemění konvergence posloupnosti, protože v jmenovateli je stejně podstatný exponent roven 8, což je větší než 4. Pak dokažte, že zbytek jde k nule. A to tím, že píšete, že posloupnost je klesající a pro $\varepsilon > 0$ dané najdete $N \in \mathbb{N}$ takové, že nový výraz $\frac{2}{n^4} < \varepsilon$. Jiná možnost je věta o součtu limit, kde obě limity jsou 0. Tady ovšem chci, abyste pro $\varepsilon > 0$ našli N z definice limity.

Dalsi cviceni,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + n\sin(n^2)}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{(n^2)}}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\cos^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{4}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi n^2 + \pi^2 n + \pi^3}{en^2 - \pi^2 n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} \quad \text{(Návod v poznámkách, jsme jíž na cvičení udělali)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n^2)!}$$

7. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 7.1. Pomoci vety o aritmetice limit vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}.$$

Příklad 7.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}.$$

Příklad 7.3. Vypočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+4^n},\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+a+\ldots+a^n}{1+b+\ldots+b^n}\ \text{pro } |a|<1 \text{ a } |b|<1,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n},\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\Big[(n+2)^2-(n+1)^2\Big]^{n+1}}{\Big[(n+1)^3-n^3-3n^2\Big]^{n-1}}}.$$

Příklad 7.4. Vypočtěte: $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a^n+b^n}}{\sqrt[n]{a^{2n}+b^{2n}}}\right)$ pro $a>b>0$.

Výsledky

- Příklad 7.1: 0, 2, 2
- Příklad 7.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Příklad 7.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

8. Limita posloupnosti reálných čísel

Příklad 8.1. Spočtěte limity:

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Příklad 8.2. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n^3\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}}.$$

Příklad 8.3. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Příklad 8.4. Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right).$$

Příklad 8.5. Spočtěte:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Výsledky

- Příklad 7.1: 0, 2, 2
- Příklad 7.2: $-1/2$, $1/3$, $1/4$
- Příklad 7.3: 1-4. 0, 4, 0, 0

  5. Víme, že pro $k \in \mathbb{N}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^k} = +\infty$. Odtud plyne, že existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; n^2 \leq n^3 \leq n^4 \leq 2^n \leq 3^n \leq 4^n.$$

  Platí tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \; 4 \leq \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} \leq 4\sqrt[n]{6}.$$

  Víme, že platí $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = 1$ a proto podle věty o dvou policajtech dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2+n^3+n^4+2^n+3^n+4^n} = 4.$$

  6. 2/3
- Příklad 7.4: $1/a$
- Příklad 8.1:1.-4. 0, 0, 0, 1

  5. Nejprve upravíme výraz, jehož limitu máme spočítat.

$$\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}$$
$$= \frac{(n^3+n)^{\frac13}-(n^3+1)^{\frac13}}{(n^3+2n)^{\frac13}-(n^3+n)^{\frac13}} \cdot \frac{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}} \cdot$$
$$\cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n^3+2n)^{\frac23}+(n^3+2n)^{\frac13}(n^3+n)^{\frac13}+(n^3+n)^{\frac23}}{(n^3+n)^{\frac23}+(n^3+n)^{\frac13}(n^3+1)^{\frac13}+(n^3+1)^{\frac23}}$$
$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(1+\frac{2}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{2}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}}{(1+\frac{1}{n^2})^{\frac23}+(1+\frac{1}{n^2})^{\frac13}(1+\frac{1}{n^3})^{\frac13}+(1+\frac{1}{n^3})^{\frac23}}$$

  Odtud již vyplývá, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}} = 1.$
- Příklad 8.2: 1. Limita neexistuje.

  2. Spočítejme nejprve tuto limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt{n}n}{n^3+\sqrt{2n}n}.$$

  Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3\sqrt{n}n}{n^3+\sqrt{2n}n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}n}{1+\sqrt{\frac{\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{n}}{n^6}}} = 1.$$

  Zde jsme využili větu o aritmetice limit a $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}n = 1$. Z výše uvedeného a věty o limitě vybrané posloupnosti vyplývá, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)^3\sqrt{2n}2n}{(2n)^3+\sqrt{4n}2n} = 1 \qquad \text{a} \qquad \lim_{n\to\infty} -\frac{(2n+1)^3\sqrt{2n+1}2n+1}{(2n+1)^3+\sqrt{4n+2}2n+1} = -1.$$

  To znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3\sqrt{n}n}{n^3+\sqrt{2n}n}$ neexistuje.

- Příklad 8.3: Platí:

$$
\begin{aligned}
(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}4^j-\sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}3^j\\
&= \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}n^{100-j}(4^j-3^j)=100n^{99}+P_1(n);\\
(n+2)^{100}-n^{100} &= 200n^{99}+P_2(n),
\end{aligned}
$$

kde $P_1,\ P_2$ jsou polynomy stupně ostře menšího než 99. Pro tyto polynomy tedy platí

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_1(n)}{n^{99}}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{P_2(n)}{n^{99}}=0.$$

Dostáváme tak:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}=\lim_{n\to\infty}\frac{100+\frac{P_1(n)}{n^{99}}}{200+\frac{P_2(n)}{n^{99}}}=1/2.$$

- Příklad 8.4: Platí

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\\
&=\lim_{n\to+\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1})\cdot\frac{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{2}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}}.
\end{aligned}
$$

Víme, že platí:
(1) $\forall n\in\mathbb{N}:\ |\sin(n+1)|\le 1$,
(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.
Z (1) a (2) plyne $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(n+1)}{n^2}=0$. Odtud, z (3) a z věty o aritmetice limit plyne

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+\sin(n+1))\cdot\left(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

- Příklad 8.5: 3, 1/2

9. Rekurentně zadané posloupnosti

Příklad 9.1. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \text{ a } a_1 = 10$$

Příklad 9.2.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Příklad 9.3. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} a_n, \text{ kde } a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{1}{a_n}\Big) \text{ a } a_1 > 0,$$

Příklad 9.4. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$$

Příklad 9.5. Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$$

Teoretický Příklad 9.6. Nechť jsou posloupnosti x_n a y_n divergentní. Je možné říci, že posloupnosti $x_n + y_n$ nebo $x_n y_n$ jsou také divergentní?

Teoretický Příklad 9.7. Nechť $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. Je možné říci, že platí buď $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ nebo $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$?

Těžký Příklad 9.8. Nechť $a_1 < a_2$ jsou zadané a $a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}$, $n \geq 3$, je rekurentně zadaná. Ukažte, že existuje limita a spočtěte ji.

Výsledky

- Příklad 9.1 limita je rovna 5. Ukažte, že a_n je klesající, a pomocí indukce dokažte, že $a_n \geq 5$. Tedy existuje limita. Zlimitíme vztah $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ a dostaneme $A = 6 - \frac{5}{A}$ a tedy $A = 5$.
- Příklad 9.2 limita je rovna 2. Ukažte, že a_n je rostoucí, a pomocí indukce dokažte, že $a_n \leq 2$. Tedy existuje limita. Zlimitíme vztah $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ a dostaneme $A = \sqrt{2 + A}$ a tedy $A = 2$.
- Příklad 9.3 limita je rovna 1. Rozlište, jestli $a_1 \geq 1$ nebo $a_1 \leq 1$.
- Příklad 9.4 limita je rovna 0. Totiz

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}) = \frac{\sqrt{n}(3-2)}{\sqrt[n]{3^{n-1}} + \sqrt[n]{3^{n-2}}\sqrt[n]{2} + \ldots + \sqrt[n]{2^{n-1}}} \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}
$$

- Příklad 9.5 limita je rovna 0. Pocitame

$$
\begin{aligned}
|\sin(\pi\sqrt{n^2+1})| &= |\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) - \sin(\pi n)| \\
&= \left|2\sin\Big(\frac{\pi}{2}(\sqrt{n^2+1} - n)\Big)\cos(.)\right| \\
&\leq 2\sin\Big(\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2}}\Big) \xrightarrow{n \to \infty} 0.
\end{aligned}
$$

- Příklad 9.8 limita je rovna $\frac{1}{3}(a_1 + 2a_2)$. Dokažte indukcí, že $a_{2k-1} < a_{2k+1} < a_{2k+2} < a_{2k}$. Tedy existuje limita suhých členů a existuje limita lichých členů.

10. Těžší příklady

Příklad 10.1. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$$

Příklad 10.2. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^a} \text{ pro } a>0$$

Příklad 10.3. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \cdot \frac{(n^4+n)^{50}-(n+1)^{200}}{(n+1)^{202}-n^{202}}$$

Příklad 10.4. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!},$$

Příklad 10.5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(-1)^n 2^n + \sqrt[2n]{n}}{(-1)^n 3^n + \sqrt[3n]{n}}}.$$

Teoretický Příklad 10.6. Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = \{0,1,3\}$.

Těžký Příklad 10.7.

(1) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0,1]$.

(2) Sestrojte posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tak, aby množina hromadných bodů byla $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0,\infty]$.

(3) Může být množina hromadných bodů rovna $H(\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}) = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$?

Výsledky

- Příklad 10.1 limita je rovna 1;

$$\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}=\frac{1+\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+2}}$$

- Příklad 10.2 limita je rovna 1;

$$\sqrt[n]{n^a}\le\left(\sqrt[n]{n}\right)^{[a]+1}\ \text{a použijeme}\ \sqrt[n]{n}\to 1$$

- Příklad 10.3 limita je rovna $-\frac{200}{101}$

$$\frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n}+1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\ \text{je zhruba}\ \frac{n^{3/2}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}},\ \text{zbytek pomocí binomické věty.}$$

- Příklad 10.4 limita je rovna ∞

$$n!\ge\left(\frac{n}{2}\right)^{n/3}\ \text{a tedy}\ \sqrt[n]{n!}\ge\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\stackrel{n\to\infty}{\to}\infty.$$

- Příklad 10.5 limita je rovna $\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\ \text{a tedy}\ 1\le\sqrt[3n]{n}\le\sqrt[2n]{n}\le 2\ \text{pro dost velké}\ n.$$

11. Limity funkcí

Příklad 11.1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$$

Příklad 11.2. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$$

Příklad 11.3. Spočtěte
$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^2-x-2\right)^{20}}{\left(x^3-12x+16\right)^{10}}$$

Příklad 11.4. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}$$

Příklad 11.5. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$$

Příklad 11.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\quad (n\in\mathbb{N}),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 11.7. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}.$$

Teoretický Příklad 11.8. Nechť $a\in\mathbb{R}$. Dokažte, že
$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to a+} f(x)=A \text{ a } \lim_{x\to a-} f(x)=A.$$

Teoretický Příklad 11.9. Limes superior a limes inferior pro funkce je definován jako
$$\liminf_{x\to a} f(x)=\lim_{\delta\to 0+}\inf f(P(a,\delta)) \text{ a } \limsup_{x\to a} f(x)=\lim_{\delta\to 0+}\sup f(P(a,\delta)).$$
Dokažte, že
$$\liminf_{x\to a}(f(x)+g(x))\ge \liminf_{x\to a} f(x)+\liminf_{x\to a} g(x)$$
a
$$\limsup_{x\to a}(f(x)+g(x))\le \limsup_{x\to a} f(x)+\limsup_{x\to a} g(x).$$

Teoretický Příklad 11.10. Dokažte, že
$$\text{Existuje } \lim_{x\to a} f(x) \Leftrightarrow \liminf_{x\to a} f(x)=\limsup_{x\to a} f(x).$$

Výsledky

- Příklad 11.1 limita je rovna 2. Je

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)}.$$

- Příklad 11.2 limita je rovna $\frac{1}{2}$. Je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}.$$

- Příklad 11.3 limita je rovna $\frac{3^{10}}{2^{10}}$. Je

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left((x-2)(x+1)\right)^{20}}{\left((x-2)^2(x+4)\right)^{10}} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} = \frac{3^{20}}{6^{10}}.$$

- Příklad 11.4 limita je rovna 1. Je $x-1 \le [x] \le x$.
- Příklad 11.5 limita je rovna 1.

$$\frac{1}{x} - 1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}.$$

- Příklad 11.6 limita je rovna $\frac{3}{2}$. Je

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{1-x}} = \frac{x+1-(1-x)}{x+1-(1-x)} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x+1)(1-x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}}.$$

- Příklad 11.7 limita je rovna $\frac{n(n+1)}{2}$. Je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-1} + \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} + \ldots + \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} =$$

$$= 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

12. Limity funkcí

Příklad 12.1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}.$$

Příklad 12.2. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}.$$

Příklad 12.3. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Příklad 12.4. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}.$$

Příklad 12.5. Spočtěte
$$\lim_{x\to 2} \Big(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{x^2-3x+2}\Big).$$

Příklad 12.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2} \text{ pro } m,n\in\mathbb{N}.$$

Příklad 12.7. Spočtěte
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln(1+2^x)}{x}.$$

Příklad 12.8. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 12.9. Spočtěte
$$\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

Teoretický Příklad 12.10. Nechť $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jsou funkce. Rozhodněte o platnosti následujících implikací.

(1) f,g jsou omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je omezená.
(2) f,g jsou shora omezené $\Rightarrow f\cdot g$ je shora omezená. f,g jsou rostoucí $\Rightarrow f\cdot g$ je rostoucí .

Teoretický Příklad 12.11. Dokažte, že Riemannova funkce
$$D(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{pro } x\in\mathbb{Q},\ x=\frac{p}{q} \text{ pro } p\in\mathbf{Z},\ q\in\mathbb{N} \text{ nesoudělná}\\ 0 & \text{pro } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$
je spojitá na $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Teoretický Příklad 12.12. Dokažte si větu, že jedna děleno "kladná nula" je ∞. Nechť $\lim_{x\to a} g(x)=0$ a existuje $\delta>0$ tak, že $g(x)>0$ na $P(a,\delta)$. Pak $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\infty$.

Výsledky

- Příklad 12.1 limita je rovna $\frac{49}{24}$. Je
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{99}+x^{98}+\cdots+x^2+x-1)}{(x-1)(x^{49}+x^{48}+\cdots+x^2+x-1)}$$
- Příklad 12.5 limita je rovna ∞. Je
$$\lim_{x\to 2}\Big(\frac{1}{x(x-2)^2}-\frac{1}{(x-1)(x-2))}\Big)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)-(x(x-2))}{x(x-2)^2(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{-x^2+3x-1}{x(x-2)^2(x-1)}.$$
- Příklad 12.6 limita je rovna $\frac{nm}{2}(n-m)$. Použijeme binomickou větu. Členy s x^k pro $k>2$ jdou k nule. Je
$$=\frac{\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}mx+\binom{n}{2}(mx)^2+\cdots}{x^2}-\frac{\binom{m}{0}1^m+\binom{m}{1}nx+\binom{m}{2}(nx)^2+\cdots}{x^2}.$$
- Příklad 12.7 limita je rovna $\ln(2)$
$$\ln 2=\frac{\ln 2^x}{x}\le\frac{\ln(1+2^x)}{x}\le\frac{\ln(2\cdot 2^x)}{x}=\frac{\ln 2+x\ln 2}{x}\overset{x\to\infty}{\to}\ln 2.$$
- Příklad 12.8 limita je rovna $\frac{4}{3}$. Je
$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}\,\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{1-\cos x}{x^2}}\xrightarrow{x\to 0}\frac{2}{1+\frac{1}{2}}.$$
- Příklad 12.9 limita je rovna $\frac{1}{144}$. Je
$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}-(-2)}{x^3+8}\,\frac{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x-6-(-2)^3}{(x+2)(x^2-2x+4)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(x-6)^2}+(-2)\sqrt[3]{x-6}+(-2)^2}$$
$$=\frac{1}{12}\,\frac{1}{4+4+4}.$$

13. Zapoctova Pisemka

Zapoctova pisemka muze vypadat nejak takto

Příklad 13.1 (Za 6 bodu)**.**
Spoctete limitu a overte z definice hodnotu limity

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{\log n}$$

Příklad 13.2 (Za 6 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^3 - n^2 + 1} - \sqrt{n^3 + n + 17}$$

Příklad 13.3 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2^{n+1}}{3^{n-1} + n!}$$

. Podrobne oduvodnete vsechny limity.

Příklad 13.4 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^2 - 10\sqrt{n})}{\log\big(\log(2^n + 100n)\big)}.$$

Teoretický Příklad 13.5 (Za 8 bodu)**.**
Rozhodnete o platnosti nasledujicich tvrzeni (tedy je dokazte, nebo sestrojte protipriklad):

i)

$$\exists \lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} \Rightarrow \Big(\exists \lim_{n\to\infty} a_n \wedge \exists \lim_{n\to\infty} b_n\Big)$$

ii)

$$\Big(\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}\Big) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \max\{a_n, b_n\} = \max\{A, B\}.$$

14. Limita funkce

Příklad 14.1. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[3]{x^3+7x}-x\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x}{x^2}, \qquad \lim_{x\to 0+}(e^x-1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 14.2. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x\,2^x}{1+x\,3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \qquad \lim_{x\to\infty}\log(1+2^x)\log\left(1+\frac{3}{x}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}(2e^x-1)^{\frac{x^2+1}{x}}, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

Příklad 14.3. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-2\sin(\frac{\pi}{6}+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 14.4. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\log(1+\sqrt{x})}.$$

Příklad 14.5. Spočtěte:

$$\lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{cotg}\pi x}, \qquad \lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\right), \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 14.6. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n\to\infty}\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right), \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^{\sqrt{n^3+3n^2}}.$$

Výsledky

- Příklad 14.1: $7/3$, $-1/2$, 1
- Příklad 14.2: 0, $1/e$, $2/3$, $\log 8$
- Příklad 14.3:

1. Platí

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right).
\end{aligned}$$

Víme, že

(i) $\lim_{y\to 0}\frac{\log(1+y)}{y}=1$,
(ii) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
(iii) $\lim_{x\to 0}\sin x=0$,
(iv) $\sin$ je prostý na $\langle -\pi/2,\pi/2\rangle$,
(v) $\sqrt{\ }$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}=1$.
Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin x)}{\sin x}\frac{\sin x}{x}\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right)=1\cdot 1\cdot 2=2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg} x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}.
\end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg} x}=1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-1}{\sin 2x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}-\frac{e^{\arcsin x}-1}{\arcsin x}\cdot\frac{\arcsin x}{x}=1.$$

Použili jsme

– $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$,
– $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,
– $\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$,
– $\sin$ je prostá funkce na jistém okolí 0,
– $\arcsin$ je prostá funkce,
– $x\mapsto 2x$ je prostá funkce,
– větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
– větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}=1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2\sin(\pi/6 + x)}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\operatorname{tg} x}\left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{x}\right). \qquad (\star)$$

Víme, že

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,

(4) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$.

Z $(\star)$, (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

- Příklad 14.4: 1.
- Příklad 14.5: $1/e$, $1/2$, $4/3$
- Příklad 14.6: 0

15. Trochu těžší příklady - limity funkci

Příklad 15.1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2-9}.$$

Příklad 15.2. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Příklad 15.3. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 15.4. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty} x\big(\sqrt[3]{x^3+7x} - x\big).$$

Příklad 15.5. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty} \log\big(1+2^x\big) \log\Big(1 + \frac{3}{x}\Big).$$

Příklad 15.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}.$$

Příklad 15.7. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{\tan x}.$$

Teoretický Příklad 15.8. Sestrojte spojitou funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která není monotónní na žádném intervalu.

Výsledky

- Příklad 15.1 limita je rovna $-\frac{1}{16}$. Rozšíříme

$$\sqrt{x+13} - \sqrt{4(x+1)}.$$

- Příklad 15.2 limita je rovna $\frac{1}{n}$. Rozšíříme podle vzorce $a^n - b^n$.
- Příklad 15.3 limita je rovna $\frac{1}{4}$. Rozšiř a

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

- Příklad 15.4 limita je rovna $\frac{7}{3}$. Rozšiř podle $a^3 - b^3$.
- Příklad 15.5 limita je rovna $3 \log 2$. Je

$$\frac{\log(1+\frac{3}{x})}{\frac{3}{x}} \to 1 \text{ a } \log(2^x) \le \log(1+2^x) \le \log(2 \cdot 2^x).$$

- Příklad 15.6 limita je rovna e^{-1}. Standardně převedeme na exponencielu

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\tan x)}{\tan x - 1} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan(2x)(\tan x - 1) = 1 \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\cos x} \right)$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x \cos x (\sin x - \cos x)}{(\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} -\frac{2\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

- Příklad 15.6 limita je rovna $1-\sqrt{3}$; Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sqrt{3}\sin x}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \lim_{x\to 0} x - \sqrt{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

16. Trochu těžší příklady - limity funkci

Příklad 16.1. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^4+2n^3}-\sqrt{n^4+1}}\right)^n.$$

Příklad 16.2. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(x^2+e^x)}{\log(x^4+e^{2x})}.$$

Příklad 16.3. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\tan x}.$$

Příklad 16.4. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\sin\bigl(2\pi\sqrt{n^2+1}\bigr).$$

Příklad 16.5. Spočtěte
$$\lim_{x\to 1}\bigl(1+\sin(\pi x)\bigr)^{\operatorname{cotg}(\pi x)}.$$

Příklad 16.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to\infty} x\Bigl(\frac{\pi}{4}-\arctan\frac{x}{x+1}\Bigr).$$

Příklad 16.7. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0+} x\log x.$$

Výsledky

- Příklad 16.1 limita je rovna e. Heine, standardní převod na exponencielu a rozšiř $a^2 - b^2$.
- Příklad 16.2 limita je rovna $\frac{1}{2}$. Standardně se zbavíme logaritmů a požijeme známé limity.
- Příklad 16.3 limita je rovna 1. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1 - (e^{\arcsin x} - 1)}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin 2x} - \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x}.$$

- Příklad 16.4 limita je rovna 0. Je

$$\lim_{n\to\infty} \sin(2\pi\sqrt{n^2+1} - 2\pi n) \text{ a pak Heine a } a^2 - b^2$$

- Příklad 16.5 limita je rovna e^{-1}. Standardně převedeme na $e^{\lim_{x\to 1} \operatorname{cotg}(\pi x)\sin(\pi x)}$
- Příklad 16.6 limita je rovna $\frac{1}{2}$. Substituce (VOLSF) $\frac{x}{x+1} = y$ převedeme na

$$\lim_{y\to 1} \frac{y}{1-y}\Big(\frac{\pi}{4} - \arctan(y)\Big).$$

Substituce (VOLSF)

$$y = \tan\big(\frac{\pi}{4} + z\big)$$

převedeme na

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{1 - \tan(\frac{\pi}{4} + z)}(-z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{4} + z)}{\cos(\frac{\pi}{4} + z) - \sin(\frac{\pi}{4} + z)}(-z)$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos z\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin z\frac{\sqrt{2}}{2} - (\sin z\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos z\frac{\sqrt{2}}{2})}(-z).$$

- Příklad 16.7 limita je rovna 0. Substituce (VOLSF) $x = e^{-y}$ převede na $\lim_{y\to\infty} e^{-y}(-y)$. Z definice exponenciely $e^y > 1 + y + \frac{y^2}{2}$, tedy

$$\frac{y}{e^y} \le \frac{y}{\frac{y^2}{2}} \xrightarrow{y\to\infty} 0.$$

17. Derivace funkce

Příklad 17.1. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$x^2 e^{-x^2}.$$

Příklad 17.2. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$\log\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

Příklad 17.3. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \text{ pro } x \neq 0 \text{ a } f(0) = 0.$$

Příklad 17.4. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$\log(\log \sin x).$$

Příklad 17.5. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$x^{\log x}$$

Příklad 17.6. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$\arccos(1-x^2)$$

Příklad 17.7. Zderivujte funkce a určete definiční obor derivace
$$x^{x^x}$$

Příklad 17.8. Pro funkci $f(x) = \arcsin x - \arccos(\sqrt{1-x^2})$ dokažte, že $f(0) = 0$ a spočtěte $f'_+(0)$ a $f'_-(0)$.

Příklad 17.9. Dokažte, že
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \text{ pro } x \neq 0.$$

Příklad 17.10. Dokažte, že
$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Teoretický Příklad 17.11. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení (tedy sestrojte protipříklad, nebo to dokažte či odkažte na větu z přednášky):
$$(i)\ \exists f'(0) \in \mathbb{R} \Rightarrow f \text{ je v } 0 \text{ spojitá.}$$
$$(ii)\ \exists f'(0) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \text{ je v } 0 \text{ spojitá.}$$
$$(iii)\ f \text{ je v } 0 \text{ spojitá} \Rightarrow \exists f'(0) \in \mathbb{R}^*.$$

Teoretický Příklad 17.12. Sestrojte funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, že $f'(x)$ existuje vlastní pro všechna $x \in \mathbb{R}$, ale funkce f' není spojitá v 0.

Výsledky

- Příklad 17.1
$$2xe^{-x^2}+x^2e^{-x^2}(-2x),\ D_{f'}=\mathbb{R}.$$
- Příklad 17.2
$$\frac{4x}{x^4-1},\ D_{f'}=\mathbb{R}\setminus[-1,1].$$
- Příklad 17.3
$$f'(x)=2x\sin\big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)+x^2\cos\big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\big)\frac{-1}{3\sqrt[3]{x^4}}\ \text{pro}\ x\neq 0$$
a
$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\big(\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\big)}{h}=0.$$
- Příklad 17.4
$$D_f=\emptyset=D_{f'}$$
- Příklad 17.5
$$(x^{\log x})'=(e^{\log^2 x})'=x^{\log x}2\log x\frac{1}{x},\qquad D_{f'}=(0,\infty).$$
- Příklad 17.6
$$D_f=[-\sqrt{2}.\sqrt{2}],\ D_{f'}=(-\sqrt{2},\sqrt{2})\setminus\{0\}$$
a
$$f'=\frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{2-x^2}}\ \text{na}\ D_{f'}.$$
Navic
$$f'_+(0)=\sqrt{2}\quad f'_-(0)=-\sqrt{2}$$
a
$$f'_-(\sqrt{2})=\infty\quad f'_+(-\sqrt{2})=-\infty.$$
- Příklad 17.7
$$(x^{x^x})'=(e^{\log x e^{x\log x}})'=x^{x^x}\big(\frac{1}{x}x^x+x^x\log x(\log x+1)\big),\ D_{f'}=(0,\infty).$$
- Příklad 17.8
$$f'_+(0)=0,\ f'_-(0)=2$$
a
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
- Příklad 17.9 Nechť
$$f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x},$$
pak
$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{-1}{x^2}=0,$$
tedy $f(x)$ je konstantní funkce. Z $f(1)=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}$ dostaneme hodnotu konstanty.
- Příklad 17.10 V bode 0 mají funkce stejnou hodnotu. Ukažte, že
$$(\arctan x)'=(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})'.$$
.

18. Derivace funkce v problémových bodech

Příklad 18.1. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$x^2 \exp(-|x-1|)$$

Příklad 18.2. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\max\bigl\{\min\{\cos x, \left(\tfrac{1}{2}\right)\}, \left(-\tfrac{1}{2}\right)\bigr\},$$

Příklad 18.3. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Příklad 18.4. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$f(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Příklad 18.5. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\tan^2 x\right) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Příklad 18.6. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\sqrt{1-e^{-x^2}}.$$

Příklad 18.7. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\arccos\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

Příklad 18.8. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\begin{cases} x^2\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Příklad 18.9. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\max\bigl\{x + 4\arctan(\sin x), x\bigr\}.$$

Příklad 18.10. Spočtěte (jednostranné) derivace ve všech bodech, kde existují
$$\arcsin(\sin x).$$

Teoretický Příklad 18.11. Nechť f je rostoucí funkce na $(-1,1)$, která má derivaci ve všech bodech $(-1,1)$. Musí platit $f'(0) > 0$?

Teoretický Příklad 18.12. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'(0)$?

Teoretický Příklad 18.13. Nechť f je rostoucí a spojitá na $(-1,1)$. Musí pak existovat $f'_+(0)$?

Výsledky

- Příklad 18.2. Pro funkci f platí
$$f(x)=\begin{cases}-1/2, & x\in\langle 2\pi/3,4\pi/3\rangle+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos x, & x\in((\pi/3,2\pi/3)\cup(4\pi/3,5\pi/3))+2k\pi,\ k\ \in\mathbb{Z},\\ 1/2, & x\in\langle-\pi/3,\pi/3\rangle+2k\pi, k\ \in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
Z předchozího vyjádření vyplývá, že
$$f'(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\pi/3,\pi/3)+k\ \pi,\ k\ \in\mathbb{Z},\\ -\sin x, & x\in(\pi/3,2\pi/3)+k\pi,\ k\ \in\mathbb{Z}.\end{cases}$$
Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}$ a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:
$$f'_+(\pi/3+2k\pi)=\lim_{x\to\pi/3+2k\pi+}-\sin x=-\sin(\pi/3+2k\pi)=-\sqrt{3}/2,$$
$$f'_-(\pi/3+2k\pi)=\lim_{x\to\pi/3+2k\pi-}0=0,$$
$$f'_+(2\pi/3+2k\pi)=0,$$
$$f'_-(2\pi/3+2k\pi)=-\sin(2\pi/3+2k\pi)=-\sqrt{3}/2,$$
$$f'_+(4\pi/3+2k\pi)=-\sin(4\pi/3+2k\pi)=\sqrt{3}/2,$$
$$f'_-(4\pi/3+2k\pi)=0,$$
$$f'_+(5\pi/3+2k\pi)=0,$$
$$f'_-(5\pi/3+2k\pi)=-\sin(5\pi/3+2k\pi)=\sqrt{3}/2,\ k\ \in\mathbb{Z}.$$
- Příklad 18.6: Zřejmě $\mathcal{D}(f)=\mathbb{R}$. Platí $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x>0$. Vzhledem k tomu, že $1-e^{-x^2}=0\Leftrightarrow x=0$, tak pro každé $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ máme
$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{e^{-x^2}2x}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}=e^{-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-e^{x^2}}}.$$
V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}.$$
Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.
$$f'_+(0)=\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}$$
Uvědomme si, že
  - $\lim_{y\to0+}\frac{e^y-1}{y}=1$,
  - $\lim_{x\to0}-x^2=0$,
  - $-x^2=0\Leftrightarrow x=0$,
  - $\sqrt{}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x\to0+}\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}=1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme
$$\lim_{x\to0+}\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}=1.$$
Obdobně dostaneme
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{1-e^{-x^2}}}{x}=\lim_{x\to0-}-\sqrt{\frac{e^{-x^2}-1}{-x^2}}=-1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1,\ f'_-(0) = -1$.

- Příklad 18.7: Zkoumaná funkce je definována na celém $\mathbb{R}$ a je na $\mathbb{R}$ spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

- Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x\to 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto (\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x})$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

- Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x}\left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \qquad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}\left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x \log x}\right)' = e^{x^x\log x}\left((x^x)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right)\\ &= x^{(x^x)}\left(x^x(\log x + 1)\log x + x^{x-1}\right), \qquad x > 0.\end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

- Příklad 18.8 Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4\operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi\rangle,\ k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},\\ 1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi),\ k \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Funkce f je na $\mathbb{R}$ spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(2k\pi) = \lim_{x \to 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x \to 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\right) = 5,$$
$$f'_-(2k\pi) = \lim_{x \to 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x \to 2k\pi-} 1 = 1,$$

$$f'_-((2k+1)\pi) = \lim_{x \to (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x \to (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}\right) = -3,$$
$$f'_+((2k+1)\pi) = \lim_{x \to (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x \to (2k+1)\pi+} 1 = 1.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi;\ k \in \mathbb{Z}$, nemá derivaci.

19. Taylorův polynom 1

Příklad 19.1. Nalezněte Taylorův polynom stupně 4 pro funkci f v bodě 0, kde
$$f(x) = \tan x.$$

Příklad 19.2. Nalezněte Taylorův polynom stupně 3 pro funkci f v bodě 1, kde
$$f(x) = x \log x.$$

Příklad 19.3. Nalezněte Taylorův polynom stupně 5 pro funkci f v bodě 0, kde
$$f(x) = \cos(\sin x).$$

Příklad 19.4. Spoctete
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

Příklad 19.5. Spoctete
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1}{\sin x - x}.$$

Příklad 19.6. Spoctete
$$\lim_{n\to\infty} n^4 \big(\cos \tfrac{1}{n} - e^{-\frac{1}{2n^2}}\big).$$

Příklad 19.7. Nalezněte $k \in \mathbb{N}$, aby
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \tan x}{x^k} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Příklad 19.8. Nalezněte $k \in \mathbb{N}$, aby
$$\lim_{x\to 0} \big(\frac{1}{x^2} - \operatorname{cotg}^2 x\big) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Teoretický Příklad 19.9. Nechť $k, l \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pro $x \to 0$ platí
$$(i)\ x^k o(x^l) = o(x^{k+l}), \quad (ii)\ o(x^k) o(x^l) = o(x^{k+l})$$
$$(iii)\ o(x^k) + o(x^l) = o(x^{min\{k,l\}}), \quad (iv)\ o(x^k + o(x^l)) = o(x^k) \text{ pro } k < l.$$

Výsledky

- Příklad 19.1 $x + \frac{1}{3}x^3$.
- Příklad 19.2 $x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$.
- Příklad 19.3 $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$.
- Příklad 19.4 limita je rovna $\frac{1}{4!}$. Totiz
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$
- Příklad 19.5 limita je rovna -6. Totiz
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)} \frac{\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to 0} 1 + o(1)}{\lim_{x\to 0} -\frac{1}{3!} + o(1)}.$$
- Příklad 19.6 limita je rovna $\frac{-1}{12}$. Totiz pomocí Heineho převedeme na
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$
a
$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + o(x^4) - (1 + \frac{-x^2}{2} + \frac{1}{3!}(-\frac{x^2}{2})^2 + o(x^4))}{x^4} = \frac{1}{4!} - \frac{1}{8}.$$
- Příklad 19.7 limita je rovna $-\frac{2}{3}$. Totiz
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x \cos x - \sin x}{x^3} \\ &\quad = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3))(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))}{x^3}.\end{aligned}$$
- Příklad 19.8 limita je rovna $\frac{2}{3}$. Za pomoci $\frac{\sin x}{x} \to 1$ převedeme na
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3))^2 - x^2(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2))^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2(1 - x^2 + o(x^2))}{x^4}.\end{aligned}$$

20. Taylorova veta a l'Hospitalovo pravidlo

Nechť $a > 0$ a $b > 0$. Spočtěte následující limity:

Příklad 20.1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2}.$$

Příklad 20.2. Spočtěte pro $a > 0$ a $b > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log^a n}{n^b}.$$

Příklad 20.3. Spočtěte $a > 0$ a $b > 0$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{an}}{n^b}.$$

Příklad 20.4. Spočtěte $a > 0$ a $b > 0$
$$\lim_{n\to\infty} |\log \frac{1}{n}|^a \frac{1}{n^b}.$$

Příklad 20.5. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(1+x) - \arctan(1-x)}{x}.$$

Příklad 20.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$$

Příklad 20.7. Spočtěte
$$lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right).$$

Příklad 20.8. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

Výsledky

- Příklad 20.1 limita je rovna $\frac{-1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{-\sin x}{2x}=\frac{-1}{2}.$$

- Příklad 20.2 limita je rovna 0

$$\text{Pokud existuje } \lim_{x\to\infty}\frac{\log^a x}{x^b},$$

tak existuje i naše limita a rovná se jí.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log^a x}{x^b}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^{\frac{b}{a}}}\right)^a=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}-1}}\right)^a=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{b}{a}x^{\frac{b}{a}}}\right)^a=0.$$

- Příklad 20.3 limita je rovna ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{ax}}{x^b}=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{a}{b}x}}{x}\right)^b=\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a}{b}e^{\frac{a}{b}x}}{1}\right)^b=\infty.$$

- Příklad 20.4 limita je rovna 0

$$\lim_{x\to 0}|\log x|^a x^b=\lim_{x\to 0}\frac{|\log x|^a}{\frac{1}{x^b}}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{|\log x|}{\frac{1}{x^{\frac{b}{a}}}}\right)^a=\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{-b}{a}\frac{1}{x^{\frac{b}{a}+1}}}\right)^a=0.$$

- Příklad 20.5 limita je rovna 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x)-\arctan(1-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+(1+x)^2}-\frac{-1}{1+(1-x)^2}=1.$$

- Příklad 20.6 limita je rovna $\frac{1}{3}$. Je potřeba použít l'Hospitala třikrát za sebou.
- Příklad 20.7 limita je rovna $\frac{-1}{3}$. Je

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^4}$$

a 4 krát l'Hospitalovat.
- Příklad 20.8 limita je rovna $e^{-\frac{1}{3}}$. Jedná se o typ 1^∞ tedy se standartně převede na

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x^3}=\frac{-1}{3}.$$

21. Průběh funkce 1

Příklad 21.1. Vyšetřete průběhy následujících funkcí

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}};$$
$$f(x) = \log_x e;$$
$$f(x) = \log\left|\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right|;$$
$$f(x) = (\sin x)^{\cos x};$$
$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}.$$

Příklad 21.2. Vyšetřete průběhy funkcí (v prvních dvou příkladech nemusíte vyšetřovat konvexitu)

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$$
$$f(x) = (\cos x)e^{\frac{2}{3}\sin x},$$
$$f(x) = (\log|x|)^3 - 3\log|x|,$$

Příklad 21.3. Vyšetřete průběhy funkcí:

$$\sin^3 x + \cos^2 x,$$
$$\frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}},$$
$$\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{x^2 - 1},$$

$$1.|x| + \arctan(|x - 1|), \quad 2.\frac{x^3}{\sqrt{|x^4 - 1|}}, \quad 3.|(1 - x^2)e^{-x}|.$$

Příklad 21.4. Dokažte (například vyšetřením vhodného průběhu funkce), že platí:

$$e^x \geq 1 + x \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$
$$\sin x \leq x \qquad \text{pro všechna } x \in [0, \infty),$$
$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$
$$\sin x + \tan x > x \qquad \text{pro všechna } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Příklad 21.5. Dokažte, že pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \text{ a } |\arctan x - \arctan y| \leq |x - y|.$$

Teoretický Příklad 21.6. Dokažte, že funkce je konvexní na intervalu I, právě tehdy, když

$$\forall x, y \in I,\ \forall \alpha \in (0,1):\ f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

22. Zapoctova pisemka

Zapoctova pisemka muze vypadat nejak takto

Příklad 22.1 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete derivaci (popr jednostranne derivaci) funkce
$$f(x) = \log(1 + |x^2 - 3x|)$$

Příklad 22.2 (Za 15 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(\operatorname{tg} 3x)^2} - 1}{\arcsin(3x^2)}$$

Příklad 22.3 (Za 10 bodu)**.**
Spoctete nasledujici limitu
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)^{n^2}.$$

Teoretický Příklad 22.4 (Za 10 bodu)**.**
Rozhodnete o platnosti nasledujicich tvrzeni (tedy je dokazte, nebo sestrojte protipriklad): Necht $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce

i)
$$\exists K > 0 \forall x \in [-1, 1]; -Kx^2 \le f(x) \le Kx^2 \Rightarrow \exists f'(0)$$

ii)
$$\exists f'(0) \Rightarrow \exists K > 0 \forall x \in [-1, 1]; -Kx^2 \le f(x) \le Kx^2.$$

23. Průběh funkce 2

Vysetrit prubeh funkce znamena

(1) Naleznete definicni obor funkce f totiz $\mathcal{D}_f$.
(2) Overte zda-li neni funkce f suda nebo licha (popr. zda-li nema podobnou symmetrii) a zdali neni periodicka.
(3) Rici, kde je funkce f spojita a kde ma body nespojitosti.
(4) Naleznete limitou chovani funkce f na krajnich bodech intervalu spojitosti a u $\pm\infty$
(5) Spoctete f'
(6) Naleznete intervaly monotonie funkce f
(7) Spoctete f''.
(8) Najdete intervaly konvexity a konkávity funkce f
(9) Najdete lokální extrémy a inflexní body funkce f
(10) Naleznete obor hodnot funkce $\mathcal{H}(f)$
(11) Narcnete graf funkce f, ktery zobrazuje souhrn zjistenych informaci

Příklad 23.1. Vyšeřte prubeh funkce

$$\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^2+1}{x^2-1}\Big).$$

Příklad 23.2. Vyšeřte prubeh funkce

$$(x+2)e^{1/x}.$$

Příklad 23.3. Vyšeřte prubeh funkce

$$\sin x - |\cos x|.$$

Příklad 23.4. Vyšeřte prubeh funkce

$$(x^2-3x+2)e^{|x+3|-3}.$$

Teoretický Příklad 23.5. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je konvexní. Může být f nediferencovatelná

(1) na nekonečné množině?
(2) ve všech bodech $\mathbb{Q}$?
(3) v nespočetně mnoha bodech?

24. Z písemek z minulých let

Příklad 24.1. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^x - \sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

Příklad 24.2. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n + 5^n)\left(\sqrt[3]{\sqrt{n^3}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{n^3}+1}\right)$$

Příklad 24.3. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{(3+x)^x + (2+x)^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Příklad 24.4. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{1-\cos x}$$

Příklad 24.5. Spočtěte
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^{n\log(n+2)}$$

Příklad 24.6. Spočtěte
$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x + \frac{2\log(\cos x)}{x^2}}{\sqrt{x}}$$

Příklad 24.7. Určete pro které $k \in \mathbb{N}$ je následující limita vlastní a spočtěte ji
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^{20} - (n+1)^{40}}{(n^k+2)^{10} - (n+1)^{30}}.$$

Příklad 24.8. Spočtěte průběh funkce
$$8.\ f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{1+2x}} & \text{pro } x \neq -\frac{1}{2}, \\ 0 & \text{pro } x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Výsledky

- Příklad 24.1 limita je rovna $\frac{1}{2}$. Je $(1+x)^x = e^{x\log(1+x)}$. Pouzijte jednou l'Hospital, a pak $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.
- Příklad 24.2 limita je rovna $\frac{\log 5}{3}$, totiz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(2^n+5^n)}{n} = \log 5$$
přes policajty. Zbytek upravíme podle vzorce pro rozdíl dvou odmocnin.
- Příklad 24.3 limita je rovna $\sqrt{6}$ Je to limita typu 1^∞ u ktere muzeme postupovat standardnim zpusobem. Konkretne
$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{(3+x)^x+(2+x)^x}{2} - 1}{x} = \frac{\log 3 + \log 2}{2}$$
treba l'Hospitalem.
- Příklad 24.4 limita je rovna $-\frac{5}{6}$. Taylorem je
$$\lim_{x\to 0} \frac{2(1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}) - 3(1+\frac{x}{3}-\frac{x^2}{9}) + (1-\frac{x^2}{2}) + o(x^2)}{1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))}.$$
- Příklad 24.5 limita je rovna e^{-1}. Je to limita typu 1^∞ a postupujeme standardně
$$\lim_{n\to\infty} n\log(n+2)\Big(\frac{\log n}{\log(n+1)} - 1\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+2)}{\log(n+1)} \lim_{n\to\infty} -\frac{\log(1+\frac{1}{n})-1}{\frac{1}{n}}.$$
- Příklad 24.6 limita je rovna 0. Taylorem
$$\log(1+(\cos x - 1))| = (\cos x - 1) + \frac{(\cos x - 1)^2}{2} + o((\cos(x)-1)^2)$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{1+x+o(x) + \frac{2(-\frac{x^2}{2}+o(x^3))}{x^2}}{\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x+o(x)}{\sqrt{x}}.$$
- Příklad 24.7 limita je rovna 0 pro $k>3$, totiz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{40}+20n^{38}+..-(n^{40}+40n^{39}+..)}{n^{10k}+20n^{9k}+...-(n^{30}+30n^{29}+...)}$$