9. Rekurentně zadané posloupnosti

9.1

Spočtěme limitu posloupnosti zadané předpisem

$$a_1 = 10, \qquad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}, \qquad n \geq 1.$$

Nejprve musíme dokázat, že posloupnost je dobře definovaná a že má limitu. Teprve potom můžeme přejít k limitě v rekurenci.

1. Dolní mez. Dokážeme indukcí, že $a_n > 5$ pro každé $n \geq 1$. Pro první člen platí $a_1 = 10 > 5$. Jestliže $a_n > 5$, pak je a_n kladné a

$$a_{n+1} - 5 = 1 - \frac{5}{a_n} = \frac{a_n - 5}{a_n} > 0.$$

Tedy i $a_{n+1} > 5$. Indukce je dokončena; (vsimnete si, ze žádný člen není nulový, takže dělení v rekurenci je vždy možné).

2. Monotónnost. Rozdíl sousedních členů upravíme na součin:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 6 - \frac{5}{a_n} - a_n \\ &= \frac{-a_n^2 + 6a_n - 5}{a_n} \\ &= -\frac{(a_n - 1)(a_n - 5)}{a_n} < 0. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost platí, protože $a_n > 5$. Posloupnost je tedy klesající a zdola omezená číslem 5. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje konečná limita L a platí $L \geq 5$.

3. Určení kandidata limity. Posunutá posloupnost (a_{n+1}) má stejnou limitu jako (a_n). Protože $L \geq 5 > 0$, můžeme použít pravidlo pro limitu podílu:

$$L = 6 - \frac{5}{L}.$$

Po vynásobení číslem L dostáváme

$$L^2 - 6L + 5 = 0 \iff (L - 1)(L - 5) = 0.$$

Možné kořeny jsou 1 a 5, ale podmínka $L \geq 5$ vylučuje 1. Tedy je kandidat na limitu 5.

4. Doklazat limitu. Oznacme $a_n = 5 + \varepsilon$. Pak je

$$a_{n+1} = 6 - \frac{5}{5+\varepsilon} = \frac{25 + 6\varepsilon}{5 + \varepsilon} = 5 + \frac{1}{5+\varepsilon}\varepsilon \leq 5 + \tfrac{1}{5}\varepsilon$$

neboli, pro $n \geq 2$

$$5 \leq a_n \leq 5 + \frac{25}{5^n}.$$

Toto dokazuje, ze

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 5.}$$

9.2

Spočtěme limitu konečných vnořených odmocnin

$$a_1 = \sqrt{2}, \qquad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \qquad \dots$$

Člen a_n obsahuje n odmocnin. Přidáním jedné vnější odmocniny získáme rekurenci

$$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}.$$

1. Omezenost. Indukcí dokážeme $0 < a_n < 2$. Pro $n = 1$ je $0 < \sqrt{2} < 2$. Pokud $0 < a_n < 2$, pak

$$2 < 2 + a_n < 4,$$

a díky rostoucí odmocnině

$$0 < \sqrt{2+a_n} < 2.$$

Tím je indukce dokončena a všechny odmocniny jsou definované.

2. Monotónnost. Obě čísla a_{n+1} a a_n jsou kladná, takže je můžeme porovnat pomocí jejich čtverců:

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n^2 &= 2 + a_n - a_n^2 \\ &= (2 - a_n)(a_n + 1) > 0. \end{aligned}$$

Proto $a_{n+1} > a_n$. Posloupnost je rostoucí a shora omezená číslem 2, a má tedy konečnou limitu L. Z omezenosti a monotónnosti navíc plyne $\sqrt{2} \le L \le 2$.

3. Určení kandidata limity. Spojitost odmocniny dovoluje přejít k limitě v rekurenci:

$$L = \sqrt{2+L}.$$

Po umocnění dostaneme

$$L^2 - L - 2 = 0 \iff (L-2)(L+1) = 0.$$

Kořen -1 nevyhovuje podmínce $L \ge \sqrt{2}$. Kořen 2 vyhovuje i původní rovnici $2 = \sqrt{2+2}$. Proto je 2 kandidat na limitu.

4. Dokazat limitu. Pokud je $a_n < 2$ muzeme oznacit $a_n = 2 - \varepsilon_n$, pak je

$$a_{n+1} = \sqrt{2+2-\varepsilon} \ge \sqrt{4 - 2/3\varepsilon + \varepsilon^2/9} = \sqrt{(2-\varepsilon/3)^2} = 2 - \varepsilon/3$$

automaticke ale plati $a_{n+1} = \sqrt{2+2-\varepsilon} \le \sqrt{4} = 2$. Proto je

$$2 \ge a_n \ge 2 - \frac{2-\sqrt{2}}{3^n}$$

a tudiz

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 2.}$$

9.3

Nechť $a_1 > 0$ a

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \qquad n \ge 1.$$

Spočtěme $\lim_{n\to\infty} a_n$ pro libovolnou kladnou počáteční hodnotu.

1. Kladnost a dolní mez od druhého členu. Pokud je $a_n > 0$, jsou kladné také $1/a_n$ a jejich průměr. Z $a_1 > 0$ tedy indukcí plyne $a_n > 0$ pro všechna n; rekurence je dobře definovaná. Navíc

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 1 &= \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n} - 2\right) \\ &= \frac{a_n^2 - 2a_n + 1}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} \geq 0. \end{aligned}$$

Proto $a_n \geq 1$ pro každé $n \geq 2$, i když první člen může být menší než 1.

2. Monotónnost od druhého členu. Pro $n \geq 2$ platí

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1 - a_n^2}{2a_n} \leq 0,$$

protože $a_n \geq 1$. Posloupnost $(a_n)_{n\geq 2}$ je tedy nerostoucí a zdola omezená číslem 1. Má konečnou limitu $L \geq 1$. Vynechání prvního členu limitu nemění, takže stejnou limitu má celá posloupnost.

Pokud $a_1 = 1$, jsou všechny členy rovny 1. Pokud $a_1 \neq 1$, pak $a_2 > 1$ a vzorec pro $a_{n+1} - 1$ indukcí dává $a_n > 1$ pro $n \geq 2$; od druhého členu je potom posloupnost dokonce ryze klesající.

3. Určení kandidat limity. Protože $L \geq 1 > 0$, přejdeme v rekurenci k limitě:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right).$$

Vynásobením číslem $2L$ dostaneme

$$2L^2 = L^2 + 1 \iff L^2 = 1.$$

Podmínka $L \geq 1$ vybírá kladný kořen. Pro každé $a_1 > 0$ tedy je kandidat na limitu prave 1.

4. Dokazat limitu. Ukazeme, ze je jen konecne mnoho clenu a_n takovych, ze $a_n > 2$. Necht $a_n > 2$, pak

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}) \leq a_n - 1 + 1/4 = a_n - 3/4$$

Necht $1 < a_n < 2$. Oznacime-li $a_n = 1 + \varepsilon$, pak mame

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(1 + \varepsilon + \frac{1 + \varepsilon - \varepsilon}{1 + \varepsilon}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big(2 + \frac{\varepsilon + \varepsilon^2 - \epsilon}{1 + \varepsilon}\Big) \leq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Oznacme n_1 takove, ze $a_n \in (1, 2)$ pro vsechny $n \geq n_1$ a $\varepsilon_1 := a_{n_1} - 1$. Z vyssiho vypoctu mame (pro $n \geq n_1$), ze

$$1 < a_n < 1 + 2^{n_1 - n}\varepsilon^{2(n - n_1)} \to 1.$$

Neboli plati

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 1.}$$

9.4

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\big).$$

Obě odmocniny se blíží k jedné takze rozdil jde k nule ale je to pak násobeno rostoucím činitelem $\sqrt{n}$. Potřebujeme vhodný odhad rychlosti poklesu rozdilu.

Odhadneme

$$0 \le \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\big) \le \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3} - 1\big).$$

Dale, existuje n_0, takove, ze pro vsechny $n \ge n_0$ plati

$$0 \le \sqrt[n]{3} - 1 \le 2/n,$$

protoze prictenim 1 a umocnenim n dostaneme

$$1 = 1^n \le 3 < e^2 = \lim_{n\to\infty} (1 + 2/n)^n$$

a n_0 zvolime pomoci vyssi limity pro $\varepsilon = 1$.

Kombinaci predchozich odhadu mame

$$0 \le \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3} - 1\big)\frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$$

Dostaneme tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\big(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2}\big) = 0.}$$

9.5

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right).$$

Argument sinu roste do nekonečna, ale leží stále blíže k násobku $n\pi$, ve kterém je sinus nulový. Tuto vzdálenost vyjádříme přesně. Položme

$$\delta_n = \sqrt{n^2+1} - n.$$

Racionalizací získáme

$$\delta_n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

Protože $\sqrt{n^2+1} \ge n$, máme

$$0 < \delta_n \le \frac{1}{2n} \longrightarrow 0.$$

Nyní použijeme součtový vzorec pro sinus a rovnosti $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$:

$$\begin{aligned}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) &= \sin(n\pi + \pi\delta_n)\\ &= \sin(n\pi)\cos(\pi\delta_n) + \cos(n\pi)\sin(\pi\delta_n)\\ &= (-1)^n \sin(\pi\delta_n).\end{aligned}$$

Ze spojitosti sinu v nule plyne $\sin(\pi\delta_n) \to 0$. Střídající se znaménko na tomto výsledku nic nemění, neboť

$$\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right| = |\sin(\pi\delta_n)| \longrightarrow 0.$$

Tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = 0.}$$

9.6

Jsou-li obě posloupnosti (x_n) a (y_n) divergentní, musí být divergentní také jejich součet nebo součin?

Součet. Vezměme

$$x_n = (-1)^n, \qquad y_n = -(-1)^n.$$

První členy jsou

$$(x_n) = (-1, 1, -1, 1, \ldots), \qquad (y_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots).$$

Obě posloupnosti jsou divergentní: jejich sudé a liché podposloupnosti mají různé limity 1 a -1. Přesto

$$x_n + y_n = 0 \quad \text{pro každé } n,$$

takže součet je konstantní posloupnost a konverguje k nule.

Součin. Vezměme tentokrát

$$x_n = y_n = (-1)^n.$$

Obě posloupnosti opět divergují, ale

$$x_n y_n = (-1)^{2n} = 1 \quad \text{pro každé } n.$$

Součin tedy konverguje k jedné. Dokonce i v prvním příkladu je součin konstantní: $x_n y_n = -1$, takže součet i součin tam konvergují současně.

Z divergence obou posloupností nelze odvodit divergenci jejich součtu ani součinu.

Pravidla pro limitu součtu a součinu vyžadují příslušné předpoklady o existenci limit; nelze je takto použít na divergentní posloupnosti.

9.7

Předpokládejme, že $x_n y_n \to 0$. Musí alespoň jedna z posloupností (x_n) a (y_n) konvergovat k nule?

Sestrojíme protipříklad. Položme

$$x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2}, \qquad y_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

Jejich první členy jsou

$$(x_n) = (1, 0, 1, 0, \ldots), \qquad (y_n) = (0, 1, 0, 1, \ldots).$$

Pro sudá n platí $x_n = 0$, $y_n = 1$, a pro lichá n naopak $x_n = 1$, $y_n = 0$. V každém součinu je tedy jeden činitel nulový:

$$x_n y_n = 0 \quad \text{pro každé } n, \qquad \lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = 0.$$

Ani jedna posloupnost však nekonverguje k nule. Přesněji,

$$x_{2k} = 0 \to 0, \qquad x_{2k+1} = 1 \to 1,$$

$$y_{2k} = 1 \to 1, \qquad y_{2k+1} = 0 \to 0.$$

Každá má dvě podposloupnosti s různými limitami, takže nemá limitu vůbec. Proto

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0 \text{ neznamená, že} \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \text{ nebo } \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0.\end{array}}$$

Pokud bychom navíc věděli, že obě posloupnosti mají konečné limity $x_n \to x$, $y_n \to y$, pak by pravidlo pro limitu součinu dalo $xy = 0$, a tedy $x = 0$ nebo $y = 0$. V zadání však tento předpoklad chybí.

9.8

Nechť $a_1 < a_2$ a posloupnost je dána rekurencí

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geq 2.$$

Dokážeme, že má limitu, a vypočteme ji bez použití charakteristické rovnice.

Poznámka k indexům v zadání. V PDF je uvedeno $n \geq 3$. Se dvěma počátečními členy a_1, a_2 je však třeba rekurenci použít již pro $n = 2$, aby určila také $a_3 = (a_2 + a_1)/2$. Níže řešíme tuto zamýšlenou variantu. Při doslovném předpisu pro $n \geq 3$ by bylo nutné zadat ještě a_3; limita by pak byla $(a_2 + 2a_3)/3$ a nebyla by určena pouze z a_1, a_2.

1. Rozdíly sousedních členů. Položme $d_n = a_{n+1} - a_n$ pro $n \geq 1$. Z rekurence plyne

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{a_n + a_{n-1}}{2} - a_n \\ &= -\frac{1}{2}(a_n - a_{n-1}) = -\frac{1}{2} d_{n-1}, \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Protože $d_1 = a_2 - a_1 > 0$, postupně získáváme

$$d_1 = a_2 - a_1, \quad d_2 = -\frac{1}{2}(a_2 - a_1), \quad d_3 = \frac{1}{4}(a_2 - a_1), \quad \ldots$$

Indukcí tedy

$$d_n = (a_2 - a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Rozdíly střídají znaménko, takže celá posloupnost není monotónní. Jejich absolutní hodnoty se však v každém kroku zmenší na polovinu.

2. Přesný vzorec pro členy. Pro $n \geq 2$ se při sečtení rozdílů zkrátí mezilehlé členy:

$$a_n - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} d_k.$$

Dosadíme vzorec pro d_k a použijeme konečný geometrický součet:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= a_1 + (a_2 - a_1) \frac{1 - (-1/2)^{n-1}}{1 - (-1/2)} \\ &= a_1 + \frac{2}{3}(a_2 - a_1)\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \\ &= \frac{a_1 + 2a_2}{3} + \frac{2(a_1 - a_2)}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

3. Existence a hodnota limity. Protože

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \longrightarrow 0,$$

poslední člen v přesném vzorci konverguje k nule. Tím současně dokazujeme existenci limity i její hodnotu:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{a_1 + 2a_2}{3}.}$$

Označíme-li tuto hodnotu L, dostaneme také přesný odhad chyby

$$|a_n - L| = \frac{2(a_2 - a_1)}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Vzdálenost od limity se tedy s každým dalším členem zmenší na polovinu.