8.1, i)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

Obě odmocniny rostou do nekonečna, takže pravidlo pro limitu rozdílu zde nelze přímo použít. Rozdíl nejprve upravíme pomocí vztahu

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Vynásobíme a vydělíme výrazem $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$, který je kladný:

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Protože $\sqrt{n+1}\geq\sqrt{n}$, dostáváme

$$0<\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\leq\frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Pravá strana konverguje k nule. Z věty o sevřené posloupnosti tedy plyne

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0.}$$

8.1, ii)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right).$$

Tentokrát použijeme rozklad rozdílu třetích mocnin:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Dosadíme $a=\sqrt[3]{n+1}$ a $b=\sqrt[3]{n}$. Potom

$$(n+1)-n=\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\left((n+1)^{2/3}+(n(n+1))^{1/3}+n^{2/3}\right).$$

Výraz v druhé závorce je kladný, takže jím můžeme vydělit:

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{(n+1)^{2/3}+(n(n+1))^{1/3}+n^{2/3}}.$$

Každý ze tří sčítanců ve jmenovateli je alespoň $n^{2/3}$. Proto

$$0<\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\leq\frac{1}{3n^{2/3}}\longrightarrow 0.$$

Opět použijeme větu o sevřené posloupnosti a dostaneme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)=0.}$$

8.1, iii)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}.$$

Čitatel i jmenovatel konverguji k nule. Potřebujeme tedy zjistit, jak rychle se oba rozdíly zmenšují. Provedeme přesné algebraické úpravy.

Položme

$$a_n = \sqrt[4]{n+2}, \quad b_n = \sqrt[4]{n+1}, \quad c_n = \sqrt[3]{n+3}, \quad d_n = \sqrt[3]{n}.$$

Ze vzorců

$$a^4 - b^4 = (a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3), \qquad c^3 - d^3 = (c-d)(c^2+cd+d^2)$$

plyne

$$a_n - b_n = \frac{1}{a_n^3+a_n^2b_n+a_nb_n^2+b_n^3}, \qquad c_n - d_n = \frac{3}{c_n^2+c_nd_n+d_n^2}.$$

Všechny zdejší jmenovatele jsou kladné. Původní podíl je proto

$$\frac{a_n-b_n}{c_n-d_n} = \frac{c_n^2+c_nd_n+d_n^2}{3(a_n^3+a_n^2b_n+a_nb_n^2+b_n^3)}.$$

Nyní vytkneme příslušné mocniny n. Dostáváme

$$\frac{a_n-b_n}{c_n-d_n} = \frac{n^{2/3}}{3n^{3/4}} \frac{(1+\frac{3}{n})^{2/3}+(1+\frac{3}{n})^{1/3}+1}{(1+\frac{2}{n})^{3/4}+(1+\frac{2}{n})^{1/2}(1+\frac{1}{n})^{1/4}+(1+\frac{2}{n})^{1/4}(1+\frac{1}{n})^{1/2}+(1+\frac{1}{n})^{3/4}}.$$

První činitel konverguje k nule, zatimco zbytek k 3/4. Proto pomoci vety o aritmetice limit mame

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}} = 0.}$$

8.1, iv)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}.$$

Položme

$$a_n = \sqrt[3]{n^2+7}, \quad b_n = \sqrt[3]{n^2+1}, \quad c_n = \sqrt[3]{n^2+6}, \quad d_n = \sqrt[3]{n^2}.$$

Rozdíly třetích mocnin jsou tentokrát stejné:

$$a_n^3 - b_n^3 = (n^2+7)-(n^2+1) = 6, \qquad c_n^3 - d_n^3 = (n^2+6)-n^2 = 6.$$

Pomocí rozkladu rozdílu třetích mocnin tedy získáme

$$a_n - b_n = \frac{6}{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}, \qquad c_n - d_n = \frac{6}{c_n^2+c_nd_n+d_n^2}.$$

Po vydělení se šestky zkrátí:

$$\frac{a_n-b_n}{c_n-d_n} = \frac{c_n^2+c_nd_n+d_n^2}{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}.$$

Každá odmocnina obsahuje činitel $n^{2/3}$; její součiny ve výrazu výše proto obsahují $n^{4/3}$. Vydělíme čitatel i jmenovatel touto mocninou a dostaneme

$$\frac{(1+6/n^2)^{2/3}+(1+6/n^2)^{1/3}+1}{(1+7/n^2)^{2/3}+(1+7/n^2)^{1/3}(1+1/n^2)^{1/3}+(1+1/n^2)^{2/3}}.$$

Každý ze tří sčítanců v čitateli i ve jmenovateli konverguji k jedné. Jmenovatel tedy konverguje k nenulovému číslu 3, a můžeme použít pravidlo pro limitu podílu:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+7}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n^2+6}-\sqrt[3]{n^2}}=\frac{3}{3}=1.}$$

8.1, v)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}.$$

Označme

$$a_n=\sqrt[3]{n^3+n},\qquad b_n=\sqrt[3]{n^3+1},\qquad c_n=\sqrt[3]{n^3+2n}.$$

Pro rozdíly třetích mocnin platí

$$a_n^3-b_n^3=n-1,\qquad c_n^3-a_n^3=n.$$

Odtud

$$a_n-b_n=\frac{n-1}{a_n^2+a_nb_n+b_n^2},\qquad c_n-a_n=\frac{n}{c_n^2+c_na_n+a_n^2}.$$

Jmenovatel původního podílu je kladný pro každé $n\geq 1$, a proto

$$\frac{a_n-b_n}{c_n-a_n}=\frac{n-1}{n}\,\frac{c_n^2+c_na_n+a_n^2}{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}.$$

První činitel je $1-1/n$, takže konverguje k jedné. Ve druhém vydělíme čitatel i jmenovatel výrazem n^2. Přitom

$$\frac{a_n}{n}=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/3}\to 1,\qquad \frac{b_n}{n}=\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{1/3}\to 1,$$

$$\frac{c_n}{n}=\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{1/3}\to 1.$$

Tedy

$$\frac{c_n^2+c_na_n+a_n^2}{a_n^2+a_nb_n+b_n^2}=\frac{(c_n/n)^2+(c_n/n)(a_n/n)+(a_n/n)^2}{(a_n/n)^2+(a_n/n)(b_n/n)+(b_n/n)^2}\longrightarrow\frac{3}{3}=1.$$

Součin obou činitelů proto konverguje k jedné:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+n}-\sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^3+2n}-\sqrt[3]{n^3+n}}=1.}$$

8.2, i)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big).$$

Nejprve upravíme část bez střídajícího se znaménka. Stejně jako v příkladu 8.1, i) racionalizujeme rozdíl odmocnin:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1}.\end{aligned}$$

Protože $1/n \to 0$ a odmocnina je spojitá v bodě 1, platí

$$\frac{1}{\sqrt{1+1/n}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Označme původní posloupnost x_n. Pro sudé indexy máme $(-1)^{2k} = 1$, a tudíž

$$x_{2k} = \frac{1}{\sqrt{1+1/(2k)}+1} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

Pro liché indexy je $(-1)^{2k+1} = -1$, takže

$$x_{2k+1} = -\frac{1}{\sqrt{1+1/(2k+1)}+1} \longrightarrow -\frac{1}{2}.$$

Kdyby celá posloupnost měla limitu, každá její podposloupnost by konvergovala k téže hodnotě. Zde mají sudá a lichá podposloupnost různé limity. Proto

$$\boxed{\text{Limita neexistuje.}}$$

8.2, ii)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^3\,\sqrt[n]{n}}{n^3 + \sqrt[2n]{n}}.$$

Nejprve zdůvodníme pomocnou limitu

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1.$$

Uvedeme důkaz pomocí binomické věty. Platí $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq 2$ dostáváme

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varepsilon^j \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2.$$

Pro všechna dostatečně velká n je $(n-1)\varepsilon^2/2 > 1$. Potom $(1+\varepsilon)^n > n$ a po odmocnění

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon.$$

To je právě tvrzení $\sqrt[n]{n} \to 1$. Dále

$$\sqrt[2n]{n} = \sqrt{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow 1.$$

V podílu ze zadání nyní vydělíme čitatel i jmenovatel výrazem n^3:

$$b_n := \frac{n^3\,\sqrt[n]{n}}{n^3+\sqrt[2n]{n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{1+\dfrac{\sqrt[2n]{n}}{n^3}}.$$

Čitatel konverguje k jedné. Protože $\sqrt[2n]{n} \to 1$ a $1/n^3 \to 0$, platí

$$\frac{\sqrt[2n]{n}}{n^3} \to 0, \qquad b_n \to \frac{1}{1+0} = 1.$$

Pro původní posloupnost $x_n = (-1)^n b_n$ tedy máme

$$x_{2k} = b_{2k} \longrightarrow 1, \qquad x_{2k+1} = -b_{2k+1} \longrightarrow -1.$$

Opět jsme našli dvě podposloupnosti s různými limitami. Proto

$$\boxed{\text{Limita neexistuje.}}$$

8.3

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

V čitateli i ve jmenovateli se při odečtení zruší člen n^{100}. Rozhodující jsou proto členy obsahující n^{99}. Ukážeme to přesně pomocí binomické věty:

$$(n+a)^{100} = \sum_{j=0}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j} a^j.$$

Pro čitatel dostáváme

$$\begin{aligned}(n+4)^{100}-(n+3)^{100} &= \sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} n^{100-j}(4^j-3^j) \\ &= 100n^{99} + \sum_{j=2}^{100} \binom{100}{j}(4^j-3^j)n^{100-j}.\end{aligned}$$

Člen pro $j=0$ se zrušil; pro $j=1$ jsme použili $\binom{100}{1}(4-3) = 100$. Podobně ve jmenovateli

$$\begin{aligned}(n+2)^{100}-n^{100} &= \sum_{j=1}^{100} \binom{100}{j} 2^j n^{100-j} \\ &= 200n^{99} + \sum_{j=2}^{100} \binom{100}{j} 2^j n^{100-j}.\end{aligned}$$

Nyní celý podíl vydělíme výrazem n^{99}:

$$\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \frac{100 + \displaystyle\sum_{j=2}^{100} \binom{100}{j}(4^j-3^j)n^{1-j}}{200 + \displaystyle\sum_{j=2}^{100} \binom{100}{j} 2^j n^{1-j}}.$$

Pro každý index $j \geq 2$ je $1-j \leq -1$, takže $n^{1-j} \to 0$. Obě sumy mají pevný konečný počet členů, a proto jejich limity jsou nulové. Jmenovatel směřuje k nenulovému číslu 200. Tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.}$$

8.4

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\big(n^2+\sin(n+1)\big)\big(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\big).$$

Rozdíl odmocnin racionalizujeme:

$$\begin{aligned}\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1} &= \frac{(n^4+2)-(n^4+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}.\end{aligned}$$

Původní součin je tedy roven

$$\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}}.$$

Protože $n>0$, platí $\sqrt{n^4}=n^2$. Vytkneme n^2 z obou odmocnin a poté jím vydělíme čitatel i jmenovatel:

$$\frac{n^2+\sin(n+1)}{\sqrt{n^4+2}+\sqrt{n^4+1}} = \frac{1+\dfrac{\sin(n+1)}{n^2}}{\sqrt{1+2/n^4}+\sqrt{1+1/n^4}}.$$

Samotná posloupnost $\sin(n+1)$ nemusí mít limitu. Stačí však její omezenost:

$$-1\le\sin(n+1)\le 1, \qquad \left|\frac{\sin(n+1)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\to 0.$$

Z věty o sevřené posloupnosti proto plyne $\sin(n+1)/n^2\to 0$. Současně

$$\sqrt{1+2/n^4}\to 1, \qquad \sqrt{1+1/n^4}\to 1.$$

Jmenovatel má nenulovou limitu 2, takže

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\big(n^2+\sin(n+1)\big)\big(\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}\big)=\frac{1}{2}.}$$

8.5, i)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right).$$

Označme konečný součet

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}.$$

Odvodíme přesný vzorec pro S_n odečtením poloviny součtu. Pro názornost rozepíšeme několik prvních sčítanců. Pro $n\ge 5$ máme

$$\begin{aligned}S_n &= \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},\\ \frac{S_n}{2} &= \qquad \frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

Při dělení dvěma zůstávají čitatele stejné, ale každá mocnina ve jmenovateli se zvýší o jednu. Například člen $3/2^2$ ze součtu S_n se v součtu $S_n/2$ změní na $3/2^3$. Po posunutí indexu máme

$$\frac{S_n}{2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k+1}}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{2k-3}{2^k}.$$

Při odečítání nyní spojíme sčítance se stejným jmenovatelem. Na rozepsaných členech vidíme

$$\begin{aligned} S_n - \frac{S_n}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{3-1}{2^2} + \frac{5-3}{2^3} + \frac{7-5}{2^4} + \cdots \\ &\quad + \frac{(2n-1)-(2n-3)}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Pro indexy $k = 2, \ldots, n$ se čitatele při odečtení liší o 2. Člen pro $k = 1$ se vyskytuje pouze v S_n a člen pro $k = n+1$ pouze v $S_n/2$. Proto pro $n \geq 2$ platí

$$\begin{aligned} S_n - \frac{S_n}{2} &= \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{(2k-1)-(2k-3)}{2^k} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} - \frac{2n-1}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Z konečného geometrického součtu dostáváme

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{4}\left(1 - (\frac{1}{2})^{n-1}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}.$$

Dosazením vyjde

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{2} &= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{4 + (2n-1)}{2^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Tedy

$$S_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}.$$

Zbývá zdůvodnit, že poslední zlomek směřuje k nule. Binomická věta pro $n \geq 2$ dává

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Proto

$$0 \leq \frac{2n+3}{2^n} \leq \frac{2(2n+3)}{n(n-1)} = \frac{4 + 6/n}{n-1} \longrightarrow 0.$$

Z věty o sevřené posloupnosti dostaneme $(2n+3)/2^n \to 0$, a tedy

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = 3.}$$

8.5, ii)

Spočtěme

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right).$$

Pro $n \geq 2$ označme součin P_n. Každý jeho činitel rozložíme pomocí rozdílu čtverců:

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{k-1}{k}\,\frac{k+1}{k}.$$

Protože jde o konečný součin, můžeme činitele přeskupit:

$$P_n = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right)\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right).$$

Oba součiny se teleskopicky zkrátí. V prvním dostáváme

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Čísla $2, 3, \ldots, n-1$ se totiž vyskytují jednou v čitateli a jednou ve jmenovateli. Podobně ve druhém součinu

$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdots\frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

Zde se zkrátí čísla $3, 4, \ldots, n$. Výsledkem je přesný vzorec

$$P_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Protože $1/(2n) \to 0$, máme

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{2}.}$$

Alternativní řešení pomocí logaritmu

Nejprve pomocí odhadu dokážeme, že limita součinu existuje a je kladná. Potom přesnou hodnotu vypočteme teleskopickým zkrácením konečného součtu logaritmů.

1. Správný odhad logaritmu. Pro $0 \leq t < 1$ platí

$$-\frac{t}{1-t} \leq \log(1-t) \leq -t \leq 0.$$

Oba odhady získáme ze základní nerovnosti

$$\log x \leq x - 1, \qquad x > 0.$$

Dosazením $x = 1-t$ dostaneme horní odhad $\log(1-t) \leq -t$. Dosazením $x = 1/(1-t)$ dostaneme

$$-\log(1-t) \leq \frac{1}{1-t} - 1 = \frac{t}{1-t},$$

a po vynásobení číslem -1 dolní odhad $\log(1-t) \geq -t/(1-t)$.

Pro $t = 1/i^2$, kde $i \geq 2$, tedy platí

$$\log\left(1 - \frac{1}{i^2}\right) \geq -\frac{1}{i^2-1}.$$

Zlomek na pravé straně rozložíme na parciální zlomky:

$$\frac{1}{i^2-1} = \frac{1}{(i-1)(i+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}\right).$$

Rozklad ověříme převedením na společný jmenovatel:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}\right) = \frac{(i+1)-(i-1)}{2(i-1)(i+1)} = \frac{1}{i^2-1}.$$

2. Kladná dolní mez a existence limity. Všechny činitele součinu P_n jsou kladné, takže

$$L_n := \log P_n = \sum_{i=2}^{n} \log\left(1 - \frac{1}{i^2}\right), \qquad P_n = \exp(L_n).$$

Z předchozího odhadu vyplývá

$$L_n \geq -\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2 - 1}.$$

Pomocí právě odvozeného rozkladu součet přesně vypočteme. Pro názornost rozepíšeme jeho členy (pro $n \geq 4$):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i^2-1} &= \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{3}{4} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Kladné členy mají jmenovatele $1, 2, \ldots, n-1$, záporné členy $3, 4, \ldots, n+1$. Členy se jmenovateli $3, \ldots, n-1$ se tedy zruší; zůstanou první dva kladné a poslední dva záporné členy. Výsledný vzorec platí i pro $n = 2, 3$, jak ověříme dosazením. Jelikož je exponenciála rostoucí, dostáváme

$$P_n = \exp(L_n) \geq \exp\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n+1)}\right) \geq e^{-3/4} > 0.$$

Současně

$$P_{n+1} = P_n\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) < P_n,$$

protože přidaný činitel leží mezi nulou a jednou. Posloupnost (P_n) je tedy klesající a zdola omezená. Podle věty o limitě monotónní posloupnosti konverguje k nějakému číslu $P \geq e^{-3/4}$.

Odhad sám neurčuje přesnou hodnotu P: dává pouze dolní mez. K výpočtu limity nyní využijeme přesný rozklad jednotlivých logaritmů.

3. Přesný výpočet limity. Pro $i \geq 2$ jsou oba výrazy $(i-1)/i$ a $(i+1)/i$ kladné. Proto

$$\begin{aligned}
\log\left(1 - \frac{1}{i^2}\right) &= \log\left(\frac{i-1}{i}\,\frac{i+1}{i}\right) \\
&= \log(i-1) + \log(i+1) - 2\log i \\
&= \big(\log(i-1) - \log i\big) + \big(\log(i+1) - \log i\big).
\end{aligned}$$

Rozdělíme tedy konečný součet L_n na dva teleskopické součty. První z nich je

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n}\big(\log(i-1) - \log i\big) &= (\log 1 - \log 2) + (\log 2 - \log 3) \\
&\quad + \cdots + (\log(n-1) - \log n) \\
&= \log 1 - \log n = -\log n.
\end{aligned}$$

Druhý je

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n}\big(\log(i+1)-\log i\big) &= (\log 3-\log 2)+(\log 4-\log 3)\\ &\quad +\cdots+(\log(n+1)-\log n)\\ &= \log(n+1)-\log 2.\end{aligned}$$

Sečtením obou výsledků dostaneme

$$L_n = -\log n+\log(n+1)-\log 2 = \log\left(\frac{n+1}{2n}\right).$$

Nyní již můžeme přejít k limitě. Díky spojitosti logaritmu v kladném bodě $1/2$ máme

$$L_n = \log\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\longrightarrow \log\frac{1}{2}.$$

Ze spojitosti exponenciály pak plyne

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\exp(L_n) = \exp\left(\log\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.}$$