Cvičení 6: Škála funkcí a limita posloupnosti podle definice řešení

Definice a základní postup

Pro posloupnost (a_n) a číslo $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Podobně

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \iff \quad \forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 :\ a_n > K.$$

V důkazu vlastní limity nejprve pro libovolné $\varepsilon > 0$ hledáme podmínku na n, potom zvolíme konkrétní n_0 a *ověříme*, že podmínka platí pro všechna $n \geq n_0$. Předpokládáme $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

Příklad 6.1: Škála funkcí

Pro kladné posloupnosti definujeme

$$a_n \ll b_n \quad \iff \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Nechť $0 < p < q$ a $0 < \alpha < \beta$. Dokážeme

$$1 \ll (\ln n)^p \ll (\ln n)^q \ll n^p \ll n^q \ll e^{\alpha n} \ll e^{\beta n} \ll n! \ll n^n.$$

Nejjednodušší kroky: 1, 2 a 4

Krok 1: $1 \ll (\ln n)^p$**.** Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $n > 1$ jsou podmínky

$$\frac{1}{(\ln n)^p} < \varepsilon \quad \iff \quad \ln n > \varepsilon^{-1/p} \quad \iff \quad n > e^{\varepsilon^{-1/p}}$$

ekvivalentní. Položíme $n_0 = \lfloor e^{\varepsilon^{-1/p}} \rfloor + 1$. Pro všechna $n \geq n_0$ pak první nerovnost platí.

Krok 2: $(\ln n)^p \ll (\ln n)^q$**.** Protože $q - p > 0$, máme pro $n > 1$

$$\frac{(\ln n)^p}{(\ln n)^q} = \frac{1}{(\ln n)^{q-p}} \longrightarrow 0$$

podle prvního kroku.

Krok 4: $n^p \ll n^q$**.** Protože $q - p > 0$, platí

$$\frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}} \longrightarrow 0.$$

Například pro libovolné $\varepsilon > 0$ stačí zvolit $n_0 = \lfloor \varepsilon^{-1/(q-p)} \rfloor + 1$.

Krok 5 před krokem 3: $n^q \ll e^{\alpha n}$

Ukážeme dokonce, že pro libovolná $r > 0$ a $\lambda > 0$ platí

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n^r}{e^{\lambda n}} = 0.}$$

Budeme postupovat *od jednoduchého ke složitějšímu.*

Nejprve dokážeme $n/e^{\lambda n} \to 0$**.** Protože $e^\lambda > 1$, můžeme psát $e^\lambda = 1 + \delta$ pro jisté $\delta > 0$. Z binomické věty pro $n \geq 2$ dostáváme

$$e^{\lambda n} = (1+\delta)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \delta^j \geq 1 + n\delta + \binom{n}{2}\delta^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}\delta^2.$$

Všimněme si, že *lineární* člen $n\delta$ zde nestačí: po vydělení n by poskytl jen konstantní horní odhad. Rozhodující je *kvadratický* člen. Proto pro $n \geq 2$

$$0 \leq \frac{n}{e^{\lambda n}} \leq \frac{2}{\delta^2(n-1)} \longrightarrow 0.$$

Pro úplnost lze poslední limitu ověřit přímo: při $\varepsilon > 0$ stačí vzít $n_0 = \max\{2, \lfloor 1 + 2/(\delta^2\varepsilon)\rfloor + 1\}$.

Potom přejdeme k libovolné mocnině n^r**.** Zvolme $m \in \mathbb{N}$ s $m \geq r$ a položme $\mu = \lambda/m > 0$. Pro $n \geq 1$ je

$$0 \leq \frac{n^r}{e^{\lambda n}} \leq \frac{n^m}{e^{\lambda n}} = \left(\frac{n}{e^{\mu n}}\right)^m \longrightarrow 0.$$

Poslední konvergence plyne z již dokázaného výsledku pro lineární mocninu a z věty o limitě součinu. Volbou $r = q$ a $\lambda = \alpha$ máme požadovaný **krok 5**.

Krok 3: $(\ln n)^q \ll n^p$ — nyní pomocí kroku 5

Zde nejdříve dokážeme jednodušší tvrzení

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^s} = 0 \qquad \text{pro každé } s > 0.$$

To provedeme porovnáním n s mocninami čísla e, jak naznačuje postup na fotografii. Pro každé celé $n \geq 2$ existuje celé $k \geq 0$ takové, že

$$e^k \leq n < e^{k+1}; \qquad \text{například } k = \lfloor \ln n \rfloor.$$

Odtud $k \leq \ln n < k+1$ a $n^s \geq e^{sk}$, tedy

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^s} \leq \frac{k+1}{e^{sk}}.$$

Když $n \to \infty$, pak také $k = \lfloor \ln n \rfloor \to \infty$. Pravá strana má limitu nula: podle již dokázaného kroku 5 (pro lineární mocninu a parametr s) platí

$$\frac{k+1}{e^{sk}} = \frac{k}{e^{sk}} + \frac{1}{e^{sk}} \longrightarrow 0.$$

Z věty o dvou policajtech tedy $\ln n/n^s \to 0$.

Nyní vezměme libovolná $p, q > 0$ a položme $s = p/q > 0$. Dostáváme

$$\frac{(\ln n)^q}{n^p} = \left(\frac{\ln n}{n^{p/q}}\right)^q \longrightarrow 0.$$

Tím je **krok 3** dokázán, aniž bychom použili Taylorův rozvoj či derivaci exponenciální funkce.

6. $e^{\alpha n} \ll e^{\beta n}$

Protože $\beta - \alpha > 0$,

$$\frac{e^{\alpha n}}{e^{\beta n}} = e^{-(\beta-\alpha)n} \longrightarrow 0.$$

7. $e^{\beta n} \ll n!$

Označme $a_n = e^{\beta n}/n!$. Potom

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{\beta}}{n+1}.$$

Zvolme $n_0 \in \mathbb{N}$ dost velké, aby pro každé $n \geq n_0$ platilo $e^{\beta}/(n+1) \leq 1/2$; stačí například $n_0 = \lceil 2e^{\beta} \rceil$. Tedy $a_{n+1} \leq a_n/2$ a indukcí

$$0 < a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{2^k} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Pravá strana konverguje k nule, a proto $a_n \to 0$.

8. $n! \ll n^n$

Pro $n \geq 2$ platí $k \leq n/2$ u prvních $\lfloor n/2 \rfloor$ činitelů součinu $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$. U zbývajících činitelů platí $k \leq n$. Dostáváme

$$n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\lfloor n/2 \rfloor} n^{n-\lfloor n/2 \rfloor}, \qquad 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq 2^{-\lfloor n/2 \rfloor} \longrightarrow 0.$$

Tím je první škála dokázána.

Převrácená škála

Jestliže jsou $a_n, b_n > 0$ a $a_n \ll b_n$, pak

$$\frac{1/b_n}{1/a_n} = \frac{a_n}{b_n} \longrightarrow 0, \quad \text{tedy} \quad \frac{1}{b_n} \ll \frac{1}{a_n}.$$

Obrácením pořadí a převrácením jednotlivých členů dostáváme

$$n^{-n} \ll \frac{1}{n!} \ll e^{-\beta n} \ll e^{-\alpha n} \ll n^{-q} \ll n^{-p} \ll (\ln n)^{-q} \ll (\ln n)^{-p} \ll 1.$$

Příklad 6.2: $n \to +\infty$

Pro $K = 10, 100, 1000, 10000$ je nejmenší přípustné n postupně $11, 101, 1001, 10001$.

Důkaz podle definice. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Zvolme

$$\boxed{n_0 = \max\{1, \lfloor K \rfloor + 1\}.}$$

Pro každé $n \geq n_0$ platí

$$n \geq n_0 \geq \lfloor K \rfloor + 1 > K.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$.

Pozor: Nestačí, že posloupnost nabývá libovolně velkých hodnot. Definice požaduje, aby *všechny* členy od jistého indexu překročily K.

Příklad 6.3: $n^2 \to +\infty$

Pro $K = 10, 400, 1600$ je nejmenší přípustné n postupně $4, 21, 41$.

Přímý důkaz. Nechť $K \in \mathbb{R}$. Volíme

$$n_0 = \begin{cases} 1, & K < 0, \\ \lfloor \sqrt{K} \rfloor + 1, & K \geq 0. \end{cases}$$

Pro $n \geq n_0$ máme v případě $K < 0$ nerovnost $n^2 \geq 1 > K$. V případě $K \geq 0$ platí $n > \sqrt{K}$, a tudíž $n^2 > K$. To dokazuje $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$.

Druhý důkaz. Pro $n \geq 1$ platí $n^2 \geq n$. Pro libovolné $K \in \mathbb{R}$ najdeme podle předchozího příkladu n_0 takové, že $n > K$ pro všechna $n \geq n_0$. Pak $n^2 \geq n > K$. Tedy opět $n^2 \to +\infty$.

Příklad 6.4: $\frac{13}{\sqrt{n}} \to 0$

Nejprve ověříme, že posloupnost je klesající:

$$\sqrt{n+1} > \sqrt{n} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{13}{\sqrt{n+1}} < \frac{13}{\sqrt{n}}.$$

Samotná monotonie ještě nestačí k určení hodnoty limity.

Důkaz podle definice. Nechť $\varepsilon > 0$. Pro $n \geq 1$ jsou následující nerovnosti ekvivalentní:

$$\frac{13}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff 13 < \varepsilon\sqrt{n} \iff \frac{13}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{169}{\varepsilon^2} < n.$$

Zvolme

$$\boxed{n_0 = \lfloor \frac{169}{\varepsilon^2} \rfloor + 1.}$$

Jestliže $n \geq n_0$, pak $n > 169/\varepsilon^2$, a tedy

$$\left| \frac{13}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{13}{\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

Proto $\lim_{n\to\infty} 13/\sqrt{n} = 0$.

Příklad 6.5: $\frac{10n^4+7n^3}{10n^8} \to 0$

Pro $n \geq 1$ platí $7n^3 \leq 10n^4$, a proto

$$0 < \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} \leq \frac{20n^4}{10n^8} = \frac{2}{n^4}.$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Nerovnost $2/n^4 < \varepsilon$ platí, jakmile $n > (2/\varepsilon)^{1/4}$. Volíme tedy

$$\boxed{n_0 = \lfloor (2/\varepsilon)^{1/4} \rfloor + 1.}$$

Pro všechna $n \geq n_0$ pak

$$\left| \frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} - 0 \right| \leq \frac{2}{n^4} < \varepsilon.$$

Tím je dokázána požadovaná limita.

Jiný odhad:

$$\frac{10n^4 + 7n^3}{10n^8} = \frac{1}{n^4} + \frac{7}{10n^5} \leq \frac{17}{10n^4} < \frac{2}{n^4}.$$

Doplňující příklady ze strany 7

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + n\sin(n^2)}{n^2}$

Platí

$$\frac{n^3 + n\sin(n^2)}{n^2} = n + \frac{\sin(n^2)}{n} \geq n - \frac{1}{n} \geq n - 1.$$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, aby $n_0 > K + 1$. Pro všechna $n \geq n_0$ je výraz alespoň $n - 1 > K$. Proto limita je $\boxed{+\infty}$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{4^n}$

Z Bernoulliovy nerovnosti

$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n \geq 1 + \frac{n}{3}.$$

Tedy

$$0 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{3}{n+3} \longrightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{n^2}}{4^n}$

Pro $n \geq 2$ je $3^n/4 \geq 9/4 > 2$, a tedy

$$\frac{3^{n^2}}{4^n} = \left(\frac{3^n}{4}\right)^n \geq 2^n \geq 1 + n \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}}$

Pro $n \geq 2$ platí

$$\frac{(n+1)^{200} + n^{10}}{(n-1)^{199}} \geq (n+1)\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{199} \geq n + 1 \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\cos n}$

Tato limita *neexistuje*. Pouhý odhad $|n/\cos n| \geq n$ nestačí: znaménko $\cos n$ se mění.

Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nechť $p_k \in \mathbb{N}$ je celé číslo nejbližší $2k\pi$ a $q_k \in \mathbb{N}$ celé číslo nejbližší $(2k+1)\pi$. Potom

$$|p_k - 2k\pi| \leq \tfrac{1}{2}, \qquad |q_k - (2k+1)\pi| \leq \tfrac{1}{2}.$$

Protože $1/2 < \pi/2$,

$$\cos p_k \geq \cos(1/2) > 0, \qquad \cos q_k \leq -\cos(1/2) < 0.$$

Navíc $p_k, q_k \to +\infty$. Proto

$$\frac{p_k}{\cos p_k} \geq p_k \to +\infty, \qquad \frac{q_k}{\cos q_k} \leq -q_k \to -\infty.$$

Jsou to dvě podposloupnosti s neslučitelným limitním chováním; původní posloupnost nemá ani vlastní, ani nevlastní limitu. Výrazy jsou definovány: $\cos n = 0$ by vyžadovalo $n = \pi/2 + j\pi$, což pro celé n není možné.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\cos^2 n}$

Protože $0 < \cos^2 n \leq 1$, dostáváme

$$\frac{n}{\cos^2 n} \geq n \longrightarrow +\infty.$$

Limita je $\boxed{+\infty}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/4}$

Nechť $K \in \mathbb{R}$. Pro $K \leq 0$ stačí $n_0 = 1$. Pro $K > 0$ položme $n_0 = \lfloor K^4 \rfloor + 1$. Pak pro $n \geq n_0$ máme $n > K^4$, a tedy $n^{1/4} > K$. Limita je $\boxed{+\infty}$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n!}$

Pro $n \geq 6$ máme

$$n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3),$$

a protože $n-1, n-2, n-3 \geq n/2$,

$$0 < \frac{n^2}{n!} \leq \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \leq \frac{8}{n^2} \longrightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi n^2 + \pi^2 n + \pi^3}{en^2 - \pi^2 n}$

Vydělíme čitatele i jmenovatele n^2:

$$\frac{\pi + \pi^2/n + \pi^3/n^2}{e - \pi^2/n} \longrightarrow \frac{\pi}{e}.$$

Použili jsme větu o limitě součtu a podílu, přičemž $e \neq 0$. Limita je $\boxed{\pi/e}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n}$

Pro $n \geq 2$ z binomické věty plyne

$$2^n = (1+1)^n \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

a tedy

$$0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{2}{n-1} \longrightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n^2)!}$

Pro $n \geq 2$ platí

$$(n^2)! = n!(n+1)(n+2)\cdots(n^2),$$

a proto

$$0 < \frac{n!}{(n^2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n^2)} \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0.$$

Limita je $\boxed{0}$.