

Algoritmy na polynomech, cvičení 2

borysek@karlin.mff.cuni.cz

<https://karlin.mff.cuni.cz/~borysek/>

16. října 2025

1 Teoretická část

1. Dokažte, že uspořádání na termech $<_{LEX}$, $<_{GLEX}$ i váhované jsou přípustná.
2. Dokažte, že $>>$ je ostré a terminující uspořádání, za předpokladu, že $<$ je přípustné uspořádání na termech.
3. Všimněte si, že obecně není $>>$ lineární. Předpokládejte, že máme nějaké přirozené uspořádání na našem tělese (jako např. na $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$). Lze „zlinearizovat“ $>>$ na nějaké $>>'$, které již bude lineární? Přijďme tím o nějakou (pro výpočty a v našem kontextu) příjemnou vlastnost?

4. Uspořádejte

$$\begin{array}{ll} xy^2 + x^2y, & -2xy^2 + x^4 + x^2y, \\ -x^2y + 2x^2y^2 + 2, & x^2y + x + 2y^2 \end{array}$$

pomocí uspořádání $<<$ určeného termovým uspořádáním:

- (a) $<_{LEX}, x > y$;
 - (b) $<_{LEX}, x < y$;
 - (c) $<_{GLEX}, x > y$;
 - (d) $<_{GLEX}, x < y$.
5. Rozhodněte, zda polynom $x^5 + x^3 - 2x + 1 \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky 0, leží v ideálu $\langle x^3 - x^2 + x + 1, x^4 - 1 \rangle$. Stačí si rozmyslet postup.
 6. Mějme $R = \{xy - x^3 - x^2, x^4 + x^3 + x\}$. Bez důkazu můžete použít, že R je Gröbnerova báze pro $<_{LEX}, x < y$. Určete, zda $x^4y^4 + x^3y^3 \in \langle R \rangle$.
 7. Ukažte, že R z předchozího cvičení není Gröbnerova báze pro $<_{LEX}, x > y$.
 8. Vrchol $nf(x)$ se nazývá *normální tvar* vrcholu x právě tehdy, když $nf(x)$ je terminál a $x \xrightarrow{*} nf(x)$. Ukažte, že terminující graf G je konvergentní právě tehdy, když každý vrchol v G má jednoznačný normální tvar.
 9. Nechť $R \subseteq T[x_1, \dots, x_n]$. Nechť pro každý polynom $f \in \langle R \rangle$ platí $f \xrightarrow[*]{R} 0$. Dokažte bez použití věty 21.1, že pak R je Gröbnerova báze ideálu $\langle R \rangle$.
 10. Dokažte, že R je Gröbnerova báze ideálu $I = \langle R \rangle$ právě tehdy, když $\langle \text{lt}(R) \rangle = \langle \text{lt}(I) \rangle$. Rozumí se $\text{lt}(U) = \{\text{lt}(u) : u \in U\}$. Dokažte tuto větu bez použití věty 21.1. Může se hodit dokázat nejprve předchozí dvě cvičení
 11. Platí věta, že graf G je normální právě tehdy, když je konfluentní. Lze tato věta zesílit na tvrzení: „Graf G je konvergentní právě tehdy, když je konfluentní?“ A platí to pro G konečné?
 12. Platí ve cvičení 8 implikace zprava doleva bez předpokladu terminujícíchosti? Tedy plyne z toho, že každý vrchol má jednoznačný normální tvar, i to, že daný graf je pak nutně konvergentní-terminující a normální?

2 Výpočetní část

1. Zopakujte si, jakým způsobem funguje uspořádání na termech v **SageMath**.
https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial_rings/sage/rings/polynomial/term_order.html
2. Nastudujte si, jakým způsobem fungují ideály a Gröbnerovy báze v **SageMath**.
https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial_rings/sage/rings/polynomial/multi_polynomial_ideal.html
3. Ověřte 4, 5, 6 a 7 pomocí **SageMath**.