

Algoritmy na polynomech, cvičení 1

borysek@karlin.mff.cuni.cz

<https://karlin.mff.cuni.cz/~borysek/>

2. října 2025

1 Teoretická část

1. Dokažte větu o fundované indukci- Tvzení 20.1 ze skript.
2. Necht' R, S jsou komutativní okruhy a $f : R \rightarrow S$ je surjektivní homomorfismus. Necht' navíc je R noetherovský. Dokažte, že pak je noetherovský i S .
3. Uveďte příklad oboru, který:
 - je Gaussovský a Noetherovský;
 - je Gaussovský a není Noetherovský;
 - není Gaussovský a je Noetherovský;
 - není Gaussovský a není Noetherovský.
4. Komutativní okruh R se nazývá *Artinovsky* právě tehdy, když v něm neexistuje nekonečná klesající posloupnost ideálů. Jinými slovy pokud v R existuje posloupnost ideálů $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$, potom existuje k , že $I_k = I_{k+j}$, pro všechny $j \in \mathbb{N}$. Uveďte příklad oboru, který:
 - je Artinovsky a je Noetherovský;
 - není Artinovsky a je Noetherovský;
 - není Artinovsky a není Noetherovský.
5. Dokažte, že každý Artinovsky obor je těleso.
6. Dokažte nebo uveďte protipříklad:
 - Každý konečný graf je terminující.
 - Každý konečný graf je les, pokud zapomeneme na jeho orientaci.
 - Každý konečný neorientovaný graf lze orientovat tak, aby byl terminující.
7. Brzy dokážete větu, která tvrdí, že graf G je normální právě tehdy, když je konfluentní. Lze tato věta zesílit na tvrzení: „Graf G je konvergentní právě tehdy, když je konfluentní?“
8. Vrchol $nf(x)$ se nazývá *normální forma* vrcholu x právě tehdy, když $nf(x)$ je terminál a $x \xrightarrow{*} nf(x)$. Ukažte, že terminující graf G je konvergentní právě tehdy, když každý vrchol v G má jednoznačný normální formu.
9. Platí v předchozím cvičení implikace zprava doleva bez předpokladu terminujícínosti? Tedy plyne z toho, že každý vrchol má jednoznačný normální tvar, i to, že daný graf je pak nutně konvergentní-terminující a normální?
10. Rozhodněte, zda polynom $x^5 + x^3 - 2x + 1 \in T[x]$, kde T je těleso charakteristiky 0, leží v ideálu $(x^3 - x^2 + x + 1, x^4 - 1)$.
11. Dokažte, že uspořádání na termech $<_{\text{LEX}}$, $<_{\text{GLEX}}$ i váhované jsou přípustná.

2 Programovací část

1. Zopakujte si základní práci se SageMath.
<https://doc.sagemath.org/html/en/tutorial/index.html>