

Algoritmy na polynomech, domácí úkol 1

<https://karlin.mff.cuni.cz/~borysek/>

Řešení pošlejte na mail borysek@karlin.mff.cuni.cz

DEADLINE: 28. listopadu 2024

1 Teoretická část

1. **(6 bodů)** Charakterizujte všechny přípustné termové uspořádání pro $T[x]$.
2. **(12 bodů)** Necht' $R = \{r\}$, $r \in T[x] \setminus \{0\}$. Ukažte, že $R = \{r\}$ je Gröbnerova báze ideálu $rT[x]$. Ukažte, že výsledek algoritmu A (přepisovací procedury) na f je $(f \bmod r)$.

3. (a) **(10 bodů)** Charakterizujte Gröbnerovy báze $T[x]$.
(b) **(7 bodů)** Charakterizujte všechny normované redukované Gröbnerovy báze v $T[x]$.
(c) **(5 bodů)** Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi v $\mathbb{Q}[x]$ ideálu

$$\langle x^3 + x^2 + x + 1, x^4 - 3x^2 - 2x \rangle.$$

- (d) **(20 bodů)** Popište výstup Buchbergerova algoritmu, pokud má na vstupu polynomy $f, g \in T[x]$ a pokud vždy při volbě S-polynomu budeme volit S-polynom posledních dvou polynomů přidaných do báze. Můžete se inspirovat Buchbergerovým algoritmem, který použijete na úlohu (c).
4. (a) **(5 bodů)** Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi

$$\langle 2x + y + 4z - 1, x - y - z, 2x - y + z + 1 \rangle$$

v $\mathbb{Q}[x, y, z]$ s lexikografickým uspořádáním $x > y > z$.

- (b) **(35 bodů)** Popište, jak lze nalézt normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi pro ideál generovaný lineárními polynomy pomocí Gaussovy eliminace. Můžete se inspirovat výsledkem předchozí části (a), anebo naopak předchozí část vyřešit pomocí tohoto postupu.

2 Výpočetní část

1. **(5 bodů)** Ověřte Vaše výsledky 3c a 4a pomocí zabudovaných funkcí ze **SageMath** (v teoretické části tyto úlohy samozřejmě řešte bez použití **SageMath**).

Pro následující úlohy předpokládáme, že pracujeme nad tělesem \mathbb{Q} a uspořádání máme lexikografické $x_1 > x_2 > \dots > x_n$. Používejte **SageMath** pouze pro reprezentaci polynomů. Funkce **SageMath**, jako jsou Buchbergerův algoritmus, hledání Gröbnerovýchází a rozpoznávání náležitosti v ideálu, samozřejmě nepoužívejte.

2. **(45 bodů)** Implementujte Buchbergerův algoritmus.
3. **(30 bodů)** Implementujte algoritmus na redukci Gröbnerovy báze na normovanou redukovanou. Můžete předpokládat, že na vstupu je vždy Gröbnerova báze.
4. **(8 bodů)** Implementujte algoritmus, který rozhodne, zda daný polynom patří do daného ideálu. Můžete opět předpokládat že na vstupu je Gröbnerova báze.
5. **(7 bodů)** Zkombinujte tyto algoritmy do jednoho, který určí zda polynom náleží do daného ideálu zadaného libovolnou jeho bází.
6. **(5 bodů)** Ověřte Vaše výsledky 3c a 4a pomocí Vámi vytvořených funkcí (v teoretické části tyto úlohy samozřejmě řešte bez použití **SageMath**).