Algoritmy na polynomech, cvičení 3

borysek@karlin.mff.cuni.cz
https://karlin.mff.cuni.cz/~borysek/

31. října 2024

1 Teoretická část

1. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi ideálu
$$\langle x^2y^2 + y - 1, x^2y + x\rangle \leq \mathbb{Q}[x, y]$$
pro $\underline{<_{GLEX}, x < y}$. Patří $x^2y^3 - 2xy + 3y$ do tohoto ideálu?

2. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi ideálu
$$\langle x^2 - 2y^2, xy - 3\rangle \leq \mathbb{Q}[x, y]$$
pro $\underline{<_{LEX}, x > y}$. Patří $2y^3 - x + 3$ do tohoto ideálu?

3. Nechť $I = \langle f_1, ..., f_n\rangle$, $J = \langle g_1, ..., g_m\rangle$ jsou ideály z $T[x_1, ..., x_k]$. Dokažte:
   (a) $I + J = \langle f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_m\rangle$,
   (b) $IJ = \langle f_ig_j \mid i \leq n, j \leq m\rangle$,
   (c) $I \cap J = (zI + (1 - z)J) \cap T[x_1, ..., x_k]$, kde z je nová proměnná.

4. Nechť jsou I, J ideály v $T[x_1, \dots, x_k]$, dokažte:
   (a) $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$,
   (b) $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

   Na základě těchto pozorování formulujte algoritmus, který pro dané algebraické množiny A, B a jejich algebraická vyjádření $A = V(f_1, ..., f_n)$ a $B = V(g_1, ..., g_m)$ spočítá algebraické vyjádření $A \cap B$ a $A \cup B$.

5. Najděte příklad, kdy platí $IJ = I \cap J$, a příklad, kdy tohle neplatí (I, J jsou ideály nějakého okruhu).

6. Ukažte, že vždy platí $\sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{I \cap J}$, kde $\sqrt{I}$ značí radikál ideálu I z okruhu R , tedy $\sqrt{I} = \{a \in R : \exists n \in \mathbb{N}_0 : a^n \in I\}$. Speciálně průnik radikálových okruhů je radikálový okruh.

7. Ukažte, že $T[x_1, x_2, \dots, x_k]$ není obor hlavních ideálů pro $k \geq 2$, a tedy že speciálně zde nutně neplatí rovnost, která platí v $T[x]$, tedy $\langle f, g\rangle = \langle \gcd(f, g)\rangle$.

8. Mějme $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_n\rangle$ ideál v $T[x_1, \dots, x_k]$ a nějaké přípustné uspořádání na termech a odvozené ostré uspořádání na polynomech $\gg$ v $T[x_1, \dots, x_k]$. Dále mějme faktor $R = T[x_1, \dots, x_k]/I$. Uvědomte si, že pro každou rozkladovou třídu $g+I \in R$ existuje právě jeden prvek $h \in T[x_1, \dots, x_k]$ tak, že $g + I = h + I$ a h je terminál vůči $\gg$. (Speciálně si uvědomte, že pokud $g \xrightarrow[*]{I} g_2$, pak $g + I = g_2 + I$). Navíc si uvědomte, jak lze výše uvedený prvek h s pomocí Gröbnerovy báze najít.

9. Nechť T je algebraicky uzavřené těleso a nechť $f \in T[x, y]$. Ukažte, že pak $V(f)$ je buď prázdná, nebo nekonečná.

10. Nechť T je těleso a $M \in T^{m\times n}$ je matice. Ukažte, že $\text{rank}(M) = k \iff M$ obsahuje regulární $k \times k$ podmatici.

11. Nechť $T \leq S$ jsou tělesa, $M \in T^{m \times n}$, $b \in T^m$ a nechť má soustava lineárních rovnic $Mx = b$ řešení nad S. Ukažte, že pak má řešení i nad T.
12. Nechť $f_1, \ldots, f_k \in T[x_1, \ldots, x_m]$, $T \leq S$ tělesa a $s_1, \ldots, s_k \in S$ tak, že $\sum_{i=1}^{k} s_i f_i = 1$. Platí potom, že existují $\{t_1, \ldots, t_k\} \in T$ tak, že:
$$\sum_{i=1}^{k} t_i f_i = 1?$$
13. * Nechť $T \leq S$ jsou tělesa. Nechť $g, f_1, \ldots, f_n \in T[x_1, \ldots, x_k]$ a nechť existují $h_1, \ldots, h_n \in S[x_1, \ldots, x_k]$ tak, že $\sum_{i=1}^{n} h_i f_i = g$. Ukažte, že pak existují $c_1 \ldots, c_n \in T$ tak, že $\sum_{i=1}^{n} c_i f_i = g$. Tedy že pokud $g \in \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{S[x_1,\ldots,x_k]}$, pak i $g \in \langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{T[x_1,\ldots,x_k]}$.
14. * Nechť $f, g \in T[x, y]$ jsou nesoudělné polynomy. Ukažte, že pak $V(f, g)$ je konečná.
15. *Ukažte, že problém určit, zda polynom $p(\overline{x})$ náleží danému ideálu $I \leq \mathbb{Q}[\overline{x}]$, je NP-těžký.
16. Najděte normovanou redukovanou Gröbnerovu bázi pro ideál
$$\langle xz - 3x^2 + x + 6x^3 + 1, y^2 + x^2 - 2, x^5 - 6x^3 + x^2 - 1 \rangle \leq \mathbb{Q}[x, y, z]$$
v uspořádání $\underline{<_{LEX}, x < y < z}$.

2 Výpočetní část

1. Ověřte 1, 2 a 16 pomocí `SageMath`.
2. Své výsledky samotného Buchbergerova algoritmu u 1, 2 a 16 si můžete ověřit také pomocí `SageMath`.
`https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial_rings/sage/rings/polynomial/toy_buchberger.html`