

# Algoritmy na polynomech, cvičení 2

borysek@karlin.mff.cuni.cz

<https://karlin.mff.cuni.cz/~borysek/>

17. října 2024

## 1 Teoretická část

1. Dokažte, že  $\ll$  je ostré a terminující uspořádání, za předpokladu, že  $<$  je přípustné uspořádání na termech.
2. Všimněte si, že obecně není  $\ll$  lineární. Předpokládejte, že máme nějaké přirozené uspořádání na našem tělese (jako např. na  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ). Lze „zlinearizovat“  $\ll$  na nějaké  $\ll'$ , které již bude lineární? Přijďeme tím o nějakou (pro výpočty a v našem kontextu) příjemnou vlastnost?

3. Uspořádejte

$$\begin{array}{ll} xy^2 + x^2y, & -2xy^2 + x^4 + x^2y, \\ -x^2y + 2x^2y^2 + 2, & x^2y + x + 2y^2 \end{array}$$

pomocí uspořádání  $\ll$  určeného termovým uspořádáním:

- (a)  $<_{LEX}, x > y$ ;
  - (b)  $<_{LEX}, x < y$ ;
  - (c)  $<_{GLEX}, x > y$ ;
  - (d)  $<_{GLEX}, x < y$ .
4. Předpokládejte, že  $R = \{xy - x^3 - x^2, x^4 + x^3 + x\}$  je Gröbnerova báze pro  $<_{LEX}, x < y$ . Určete, zda  $x^4y^4 + x^3y^3 \in \langle R \rangle$ .
  5. Ukažte, že  $R$  z předchozího cvičení není Gröbnerova báze pro  $<_{LEX}, x > y$ .
  6. Dokažte, že  $R$  je Gröbnerova báze ideálu  $I = \langle R \rangle$  právě tehdy, když  $\langle \text{lt}(R) \rangle = \langle \text{lt}(I) \rangle$ . Rozumí se  $\text{lt}(U) = \{\text{lt}(u) : u \in U\}$ .
  7. Platí věta, že graf  $G$  je normální právě tehdy, když je konfluentní. Lze tato věta zesílit na tvrzení: „Graf  $G$  je konvergentní právě tehdy, když je konfluentní?“ A platí to pro  $G$  konečně?
  8. Vrchol  $nf(x)$  se nazývá *normální tvar* vrcholu  $x$  právě tehdy, když  $nf(x)$  je terminál a  $x \xrightarrow{*} nf(x)$ . Ukažte, že terminující graf  $G$  je konvergentní právě tehdy, když každý vrchol v  $G$  má jednoznačný normální tvar.
  9. \*Platí v předchozím cvičení implikace zprava doleva bez předpokladu terminujícínosti? Tedy plyne z toho, že každý vrchol má jednoznačný normální tvar, i to, že daný graf je pak nutně konvergentní-terminující a normální?

## 2 Výpočetní část

1. Zopakujte si, jakým způsobem funguje uspořádání na termech v SageMath.  
[https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial\\_rings/sage/rings/polynomial/term\\_order.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial_rings/sage/rings/polynomial/term_order.html)
2. Nastudujte si, jakým způsobem fungují ideály a Gröbnerovy báze v SageMath.  
[https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial\\_rings/sage/rings/polynomial/multi\\_polynomial\\_ideal.html](https://doc.sagemath.org/html/en/reference/polynomial_rings/sage/rings/polynomial/multi_polynomial_ideal.html)
3. Ověřte 3, 4 a 5 pomocí SageMath.