Výpočet rezidua a Laurentův rozvoj

Vzorový příklad (příklad 7)

Je dána funkce $f(z) = \frac{1}{\sin \pi z}$.

Hledáme všechny singularity. Víme, že $\sin(k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, takže určitě ve všech těchto bodech máme singularity. Ale jsou i další v $\mathbb{C}$? K tomu počítáme z definice

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$e^{-i\pi z}\left(e^{2i\pi z} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{-i\pi z} = 0 \quad \text{NEBO} \quad e^{2i\pi z} = 1$$

Podíváme se nejprve na první podmínku

$e^{-i\pi z} = 0$ a píšeme $z = x + iy$

tedy $e^{-i\pi x} e^{\pi y} = 0$ což ale nelze splnit neboť $e^{\pi y} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$ a $e^{-i\pi x}$ je na jednotkové kružnici $\forall x \in \mathbb{R}$.

Musí tedy být $e^{2i\pi z} = 1$ a při přepsání $z = x + iy$ vidíme $e^{2i\pi x} e^{-2\pi y} = 1 \Leftrightarrow$

$$\left[\cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x)\right] e^{-2\pi y} = 1$$

Jelikož pravá strana je čistě reálná musí být $\sin(2\pi x) e^{-2\pi y} = 0 \Rightarrow x = k, \; k \in \mathbb{Z}$

Porovnáním i reálné části potom

$$\cos(2\pi x)\, e^{-2\pi y} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\underbrace{\cos(2\pi k)}_{=1}\, e^{-2\pi y} = 1 \Rightarrow y = 0$$

Tedy máme jen singularity na reálné ose $z = k$.

Určíme jejich typ a hodnotu rezidua.
Máme:

$$\sin(\pi z)' = \pi \cos(\pi z)\Big|_{z=k} = \pi \cos(\pi k) = \pi(-1)^k$$

a tedy se jedná o póly 1. řádu.

Navíc $\quad \mathrm{Res}(f(z), k) = \frac{1}{(\sin \pi z)'}\Big|_{z=k} = \frac{(-1)^k}{\pi}$

Určíme ještě první tři členy Laurentova rozvoje v bodě $z = 0$.
K tomu použijeme, že víme, že rozvoj

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

tedy

$$\sin(\pi z) = \pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \frac{\pi^5 z^5}{120} + \dots$$

zároveň použijeme, že víme, že $\frac{1}{\sin \pi z}$ má v nule pól 1. řádu a tedy musí být

$$\frac{1}{\sin \pi z} = A\frac{1}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \dots$$

a zároveň kvůli tomu, že $\sin(\pi z)$ je lichý máme

$$\frac{1}{\sin \pi z} = A\frac{1}{z} + Cz + Ez^3 + \dots$$

Zbývá nám tedy určit čísla A, C, E
k tomu použijeme, že

$$1 = \sin(\pi z)\frac{1}{\sin(\pi z)} = \left(\pi z - \frac{\pi^3 z^3}{6} + \frac{\pi^5 z^5}{120}\right)\left(A\frac{1}{z} + Cz + Ez^3\right)$$

$\forall z \neq k \in \mathbb{Z}$

$$= A\pi - \frac{\pi^3 z^2}{6} + \frac{\pi^5 z^4}{120} + C\pi z^2 - C\frac{\pi^3 z^4}{6} + \frac{C\pi^5 z^6}{120} + E\pi z^4 - \frac{E\pi^3 z^6}{6} + \frac{E\pi^3 z^8}{120}$$

$$\Rightarrow A\pi = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi}$$
$$\Rightarrow z^2\pi\left(-\frac{\pi^2}{6} + C\right) = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\Rightarrow \pi z^4\left(E + \frac{\pi^4}{120} - \frac{\pi^4}{36}\right) = 0 \Rightarrow E = \frac{\pi^4 7}{360}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \pi z} \sim \underbrace{\frac{1}{\pi z}} + \frac{z\pi^2}{6} + \frac{7z^3\pi^4}{360} + \dots$$

tady vidíme i reziduum!