3. písemka

Příklad 1 [1b]:
Spočtěte Fourierovu transformaci (t.j. počítejte integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$) funkce

$$f(x) = e^{-ax}Y(x),$$

kde $a > 0$ a $Y(x)$ je Heavisidova funkce.

Příklad 2 [5b]:
Řešte v oboru temperovaných distribucí rovnici

$$u' + au = \delta_0, \quad a > 0$$

1. Aplikujte formálně Fourierovu transformaci a najděte kandidáta na řešení [2b]
2. Proveďte zkoušku, t.j. spočtete příslušné distributivní derivace a dosaďte do rovnice [3b]

Všechny kroky pečlivě vysvětlete a okomentujte.

3. písemka

Příklad 1 [1b]:
Spočtěte Fourierovu transformaci (t.j. počítejte integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi x}dx$) funkce

$$f(x) = e^{ax}Y(-x),$$

kde $a > 0$ a $Y(x)$ je Heavisidova funkce.

Příklad 2 [5b]:
Řešte v oboru temperovaných distribucí rovnici

$$-u' + au = \delta_0, \quad a > 0$$

1. Aplikujte formálně Fourierovu transformaci a najděte kandidáta na řešení [2b]
2. Proveďte zkoušku, t.j. spočtete příslušné distributivní derivace a dosaďte do rovnice [3b]

Všechny kroky pečlivě vysvětlete a okomentujte.

① Počítejte integrál $\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$ kde ①
$f(x) = e^{-ax} Y(x)$

Tedy $\int_{\mathbb{R}} e^{-ax} Y(x) e^{-2\pi i \xi x} dx =$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_0^{\infty} \underbrace{e^{-(a+2\pi i \xi)x}} dx$$

Toto je konvergentní integrál neboť $a>0$ a e^{-ax} je klesající exp. zatímco $e^{-2\pi i \xi x}$ je oscilující neboť $\xi \in \mathbb{R}$.

$$= -\frac{1}{a+2\pi i \xi} \left[e^{-(a+2\pi i \xi)x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+2\pi i \xi}.$$

② Formální aplikace Four. trf:

$$(2\pi i \xi)\hat{u} + a\hat{u} = 1$$

$$\rightarrow \hat{u} = \frac{1}{a+2\pi i \xi}$$

Tedy kandidát na řešení $u = e^{-ax} Y(x)$

(2)

Provedeme zkoušku. $\overset{\circ}{u}$ $u \in L^1(\mathbb{R})$ a tudíž ji ztotožníme s distribucí zkuze

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)\,dx$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

Navíc máme pro def. distributivní derivace

$$\langle Du, \varphi \rangle \overset{def}{=} -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-ax}\varphi'(x) = -\left[e^{-ax}\varphi(x)\right]_0^\infty + \int_{\mathbb{R}} (-a)e^{-ax}\varphi(x)$$

$$= +\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} (-a)e^{-ax}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \langle \delta_0 + (-ae^{-ax})Y(x), \varphi(x) \rangle$$

Tudíž LS. rovnice

~~$\delta_0 + (-ae^{-ax})Y(x) + (ae^{-ax})$~~

$$\langle \delta_0 + (-ae^{-ax})Y(x) + (ae^{-ax})Y(x), \varphi(x) \rangle$$

$$= \langle \delta_0, \varphi(x) \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Příklad 1

Fourierova trf funkce $f(x) = e^{ax} Y(-x)$

$a>0$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ax} Y(-x)\, e^{-2\pi i \xi x} = \int_{-\infty}^{0} e^{(a-2\pi i \xi)x}\, dx =$$

$$= \left[\frac{1}{a-2\pi i\xi} e^{(a-2\pi i \xi) x}\right]_{-\infty}^{0} \overset{\#}{=} \frac{1}{a-2\pi i \xi}$$

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1 & x>0 \end{cases} \to Y(x) = \begin{cases} 1 & x<0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$$

$\#$ jelikož $a>0$ je $\left|e^{(a-2\pi i\xi)x}\right| \leq e^{ax} \to 0$

když $x \to -\infty$.

Příklad 2

1.) Aplikujme formálně FT a tedy

$$-2\pi i \xi \hat{u} + a\hat{u} = 1$$

$$\hat{u} = \frac{1}{a-2\pi i \xi}$$

a dle předchozího příkladu

$$u = e^{ax} Y(-x)$$

2.)

Dle definice je

$$\langle Du, \varphi\rangle = -\langle u, \varphi'\rangle = -\int_{\mathbb{R}} e^{ax} H(-x)\, \varphi'(x)\,dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} e^{ax} \varphi'(x) \overset{PP}{=} -\left[e^{ax}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} a e^{ax} \varphi(x)\,dx$$

$$= -\varphi(0) + \int_{\mathbb{R}} H(-x)\,(a e^{ax})\, \varphi(x)$$

a tedy ve smyslu distribucí

$$Du = -\delta_0 + au \quad \text{a tedy } \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$\langle -Du, \varphi\rangle + \langle au, \varphi\rangle =$$

$$\langle -Du + au, \varphi\rangle = \langle \delta_0 - au + au, \varphi\rangle =$$

$$= \langle \delta_0, \varphi\rangle$$ jak požadováno