Domácí úkol č. 10 k přednášce NMAG 101: Lineární algebra a geometrie 1, zimní semestr 2013–2014

Datum odevzdání 18.12.2013 16:00

(10.1) Dokažte, že $x_n = 2^{n+1} - 1$ ($n \geq 1$), kde x_n je determinant následující matice řádu n:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

(Matice má na hlavní diagonále čísla 3, nad hlavní diagonálou čísla 1, pod hlavní diagonálou čísla 2 a jinde nuly.)

Nápověda: Pomocí rozvoje (použitého dvakrát) vytvořte rekurentní vztah pro x_n pomocí dvou předchozích členů posloupnosti.

(10.2) Zobrazení $\langle\,|\,\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dáno vzorcem

$$\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T A \mathbf{v}$$

kde A je reálná symetrická čtvercová matice $A = (a_{ij})$ řádu 2. Dokažte, že $\langle\,|\,\rangle$ je skalární součin na $\mathbb{R}^2$ právě tehdy, když platí

$$a_{11} > 0 \quad \text{a} \quad \det(A) > 0 \ .$$

Bonusový problém: Vytvořte a dokažte podobné kriterium jako v příkladu 10.2. pro matici A řádu n.