## Řešení

**40)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = \frac{z-z^3}{1+z^2}$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Pro $z \notin \{0; 1\}$ a $x \neq 1$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln(|\frac{z}{z^2-1}|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě dostaneme $z = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k^2x^2}}{2kx}$, kde $k = \pm e^c$. Protože $y = xz$, dostaváme závěr:

$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = x, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = \frac{1}{2c}\left(1 \pm \sqrt{1+4c^2x^2}\right), x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

**41)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = 2(z^2 - z)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Pro $z \notin \{0; 1\}$ a $x \neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln(|\frac{z}{z-1}|) = 2\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud dostáváme $z = \frac{kx^2}{kx^2-1}$, kde $k = \pm e^c$. Protože $y = xz$, dostaváme závěr:

$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = x, x \in \mathbb{R}$$
$$y(x) = \frac{cx^3}{cx^2-1}, \begin{cases} x \in \mathbb{R}, & c \in (-\infty; 0) \\ x \in (-\infty; -\frac{1}{\sqrt{c}}), & c \in (0; +\infty) \\ x \in (-\frac{1}{\sqrt{c}}; \frac{1}{\sqrt{c}}), & c \in (0; +\infty) \\ x \in (\frac{1}{\sqrt{c}}; +\infty), & c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

**42)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = z(z+1)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = -1$. Pro $z \notin \{-1; 0\}$ a $x \neq 0$ máme $z'\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě dostáváme $z = (z+1)cx$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vynásobením $x$ a dosazením $y = xz$ převedeme rovnici na tvar $y = cxy + cx^2$. Odtud vypočteme $y = \frac{x^2}{d-x}$, kde $d = \frac{1}{c}$ pro $c \neq 0$, resp. $y \equiv 0$ pro $c = 0$. Závěr po napojení řešení v $x = 0$:

<u>první řešení</u>

$$y(x) = -x, y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

<u>druhé řešení</u>

$$y(x) = \frac{x^2}{c-x}, x \in (-\infty; c) \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \text{ a } x \in (c; +\infty) \text{ pro } c \in (0; +\infty)$$

třetí řešení

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{c-x}, x \in (-\infty; 0] \text{ pro } c \in (0; +\infty) \text{ nebo } x \in (c; 0] \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \\ \\ \dfrac{x^2}{d-x}, x \in [0; +\infty) \text{ pro } d \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in [0; d) \text{ pro } d \in (0; +\infty) \end{cases}$$

**43)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \cdot y > 0$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = z \ln(z)$ pro $z \in (0; +\infty)$. Stacionární řešení $z = 0$ a $z = 1$. Po integraci $\ln\big(|\ln(z)|\big) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $z = \exp(dx)$, kde $d = \pm e^c$. Řešení nelze napojovat. Celkem tedy dostáváme:

$$y(x) = x \exp(cx), x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

**44)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $xz' = 1$. Po integraci $z = c + \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $y = x(c + \ln|x|)$. Protože $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, ale $y'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)-0}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0}(c + \ln|x|) = -\infty$, nelze řešení spojit v počátku. Závěr: $y(x) = x(\ln|x| + c)$, $x \in (-\infty; 0)$ a $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$. (Lze řešit také jako lineární rovnici.)

**45)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě řešíme rovnici $2xzz' = -(z^2 + 1)$. Po integraci $\ln(1 + z^2) = c - \ln(|x|)$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $x^2 + y^2 = 2kx$, kde $k = \pm e^c$. Závěr:

$$y(x) = \pm\sqrt{c^2 - (x-c)^2}, x \in (2c; 0) \text{ pro } c \in (-\infty; 0) \text{ a } x \in (0; 2c) \text{ pro } c \in (0; +\infty)$$

(Lze řešit také jako Bernoulliho rovnici.)

**46)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ dostaneme rovnici $2zz' = -\frac{2}{x}$, po integraci $z^2 = c - \ln(x^2)$, $c \in \mathbb{R}$. Nelze napojovat. Závěr:

$$y(x) = \pm x\sqrt{c - \ln(x^2)}, x \in (-\exp(\tfrac{c}{2}); 0) \text{ nebo } x \in (0; \exp(\frac{c}{2})), c \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako Bernoulliho rovnici.)

**47)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2 z' = x(1 - 2z)$. Stacionární řešení $z = \frac{1}{2}$. Pro $z \neq \frac{1}{2}$ a $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{z'}{1-2z} = \frac{1}{x}$. Po integraci $-\frac{1}{2}\ln(|1 - 2z|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $y = \frac{x}{2} + \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{x}, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty) \text{ pro } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(x) = \frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako lineární rovnici.)

**48)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2 z' = -x$. Pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $z' = -\frac{1}{x}$, která po integraci přejde v $z = -\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = -x \ln|x| + cx, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R}$$

(Lze řešit také jako lineární rovnici.)

**49)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2 z' = -x(2z+1)$. Pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{-z'}{2z+1} = \frac{1}{x}$. Po integraci $-\frac{1}{2}\ln(|2z+1|) = ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $y = -\frac{x}{2} + \frac{k}{x}$, $k \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{2}, x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty), c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$y(x) = -\frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$$

**50)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a pro $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ řešíme rovnici $xz' = -z^2$. Stacionární řešení $z = 0$. Pro $z \neq 0$ máme $\frac{-z}{z^2} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\frac{1}{z} = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \frac{1}{\ln(|kx|)}$, kde $c = \ln(k)$, $k > 0$, a dále $y = xz = \frac{x}{\ln(|kx|)}$. Řešení lze napojit v bodě $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = 0, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{x}{\ln(|cx|)}, x \in (-\infty; -\tfrac{1}{c}) \text{ nebo } x \in (\tfrac{1}{c}; +\infty), c \in (0; +\infty)$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|cx|}, & x \in (-\frac{1}{c}; 0], c \in (0; +\infty) \\ \dfrac{x}{\ln(|dx|)}, & x \in [0; \frac{1}{d}), d \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty; 0] \\ \dfrac{x}{\ln(|cx|)}, & x \in [0; \frac{1}{c}), c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|cx|}, & x \in (-\frac{1}{c}; 0], c \in (0; +\infty) \\ 0 & \end{cases}$$

**51)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $2x^3zz' = x^2(1-z^2)$. Stacionární řešení $z = \pm 1$. Pro $z \notin \{-1; 1\}$ a $x \neq 0$ máme $-z'\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) = \frac{1}{x} + c$. Po itegraci a úpravě $\ln(|1-z^2|) = -\ln(|x|) - c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě a uvážení, že $y = xz$ dostáváme závěr:

$$y(x) = \pm x, x \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \pm x\sqrt{1 + \frac{c}{x}}, x \in (-\infty; \min(0; -c)) \text{ nebo } x \in (\max(0; -c); +\infty), c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

**52)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě $x^2z' = |x|\sqrt{1+z^2}$. Pro $x \neq 0$ máme $\frac{z'}{1+z^2} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}$. Po integraci $\operatorname{sgn}(z)\ln\left(|z| + \sqrt{z^2+1}\right) = \operatorname{sgn}(x)\ln(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Označíme-li $k = e^c$, potom $k > 0$ a pro $x > 0$ dostaneme $z = \frac{k^2x^2-1}{2kx}$ a pro $x < 0$ dostaneme $z = \frac{x^2-k^2}{2kx} = \frac{p^2x^2-1}{2px}$, kde $p = \frac{1}{k}$. Řešení lze napojit v bodě $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = \frac{c^2x^2-1}{2c} = \frac{c}{2}x^2 - \frac{1}{2c}, x \in \mathbb{R}, c \in (0; +\infty)$$

**53)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Po substituci a úpravě pro $x \neq 0$ dostaneme rovnici $2xzz' = z^2 - 1$. Staconární řešení $z = \pm 1$. Pro $z \notin \{-1; 1\}$ a $x \neq 0$ přejde rovnice po integraci na tvar $\ln(|z^2-1|) = \ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Řešení jdou napojovat pro $x = 0$. Závěr:

$$y(x) = \pm x\sqrt{cx+1}, \begin{cases} x \in (-\infty; -\frac{1}{c}) & \text{pro } c \in (-\infty; 0) \\ x \in \mathbb{R} & \text{pro } c \in \{0\} \\ x \in (-\frac{1}{c}; +\infty) & \text{pro } c \in (0; +\infty) \end{cases}$$

**54)** Řešíme pro taková $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$, pro která $x \cdot y \geq 0$. Stacionární řešení $y = 0$. Po substituci $2|x|\sqrt{z} = -x^2z$. Pro $z \neq 0$ a $x \neq 0$ řešíme rovnici $\frac{z'}{2z} = -\frac{\operatorname{sgn}(x)}{x}$. Po integraci $\frac{1}{2}\ln(|z|) = -\operatorname{sgn}(x)\ln(|x|) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Tedy $z = (c - \operatorname{sgn}(x)\ln(|x|))^2$, neboť $x \cdot y \geq 0 \Rightarrow z > 0 \Rightarrow |z| = z$. Označme $c\operatorname{sgn}(x) = \ln(k)$ pro $k > 0$. Potom $z = (\ln(\frac{k}{|x|}))^2$. Řešení lze napojit se stacionárním v bodě $|x| = k$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} x\ln^2(cx), & x \in (-\infty; \frac{1}{c}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{c}; +\infty) \end{cases}$$

pro $c \in (-\infty; 0)$

$$y(x) = \begin{cases} x\ln^2(cx), & x \in (0; \frac{1}{c}] \\ 0, & x \in [\frac{1}{c}; +\infty) \end{cases}$$

pro $c \in (0; +\infty)$

**55)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(z-1)z' = x^2 z$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Řešíme pro $x \neq 0$ a $z \neq 0$. Po integraci $z - \ln|z| = c + \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $z - \ln|z| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; +\infty)$ je $z - \ln|z| \in [1; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; -e^{1-c})$ nebo $x \in (e^{1-c}; +\infty)$. Po zpětné substituci $z = \frac{y}{x}$ a drobné úpravě dostáváme závěrečný implicitní vztah $y = x(c + \ln|y|)$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-\infty; -e^{1-c})$ a pro $x \in (e^{1-c}; +\infty)$. Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve druhém kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (-\infty; 0)$, a tedy $0 < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (-\infty; 0)$, a tedy $-\infty < xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; -e^{1-c})$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (0; +\infty)$, a tedy $-\infty < xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(e^{1-c}; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě je $z \in (0; +\infty)$, a tedy $0 < xz < +\infty$. Ze vztahu $z - \ln|z| = c + \ln|x|$ lze pro $x \to 0$ usoudit, že $z - \ln|z| \to -\infty$, odkud $z \to -\infty$. Pro řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ nebo na intervalu $(0; +\infty)$ usoudíme ze vztahu $z = c + \ln|y|$ pro $x \to 0$ (zleva, resp. zprava, podle toho, zda je řešení definováno pro $x < 0$, resp. $x > 0$), že $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$, a dále $y'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} z(x) = -\infty$, tedy řešení ze druhého kvadrantu nejde spojit s řešením ze čtvrtého kvadrantu (v bodě $x = 0$ by nebyla vlastní derivace). Pro řešení definované na intervalu $(-\infty; -e^{1-c})$, resp. $(e^{1-c}; +\infty)$ můžeme do vztahu $z - \ln|z| = c + \ln|x|$ za $x$ dosadit hodnotu $x = \pm e^{1-z}$ a obdržíme $z - \ln|z| = 1$. Tato rovnice má pro $z \in (0; +\infty)$ jediné řešení $z = 1$. Můžeme tedy usoudit, že $\lim\limits_{x \to \pm e^{1-c}} y(x) = \lim\limits_{x \to \pm e^{1-c}} xz(x) = \pm e^{1-c}$, a dále $|y'(\pm e^{1-c})| = |\lim\limits_{x \to \pm e^{1-c}} \frac{y^2(x)}{xy(x) - x^2}| = |\lim\limits_{x \to \pm e^{1-c}} (\frac{y(x)}{x} \frac{y(x)}{y(x) - x})| = |\lim\limits_{x \to \pm e^{1-c}} (\frac{1}{z(x)} \frac{y(x)}{y(x) - x})| = +\infty$, tedy řešení mající graf ve třetím, rep. prvním kvadrantu nelze prodloužit za bod $x = -e^{1-c}$, resp. před bod $x = e^{1-c}$. Dostáváme tak maximální řešení určená implicitním vztahem definovaná na intervalu $(-\infty; 0)$, $(-\infty; -e^{1-c})$, $(0; +\infty)$ a $(e^{1-c}; +\infty)$ a dále stacionární řešení $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

**56)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(1 - z^2)z' = z^3 + z$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq 0$ dostáváme $z' \left(\frac{1}{z} - \frac{2z}{1+z^2}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z| - \ln(z^2 + 1) = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Odtud $z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4k^2x^2}}{2kx}$, kde

$k = e^c > 0$, a tedy $y = xz = \frac{1\pm\sqrt{1-4k^2x^2}}{2k}$. Závěr:

$$y(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k^2x^2}}{2k},\ x \in (-\frac{1}{2k}; \frac{1}{2k})$$

**57)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3(4z^2+3z+1)z' = -4x^2(z^3+z^2+z+1)$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq -1$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{3z}{z^2+1} + \frac{1}{z+1}\right) = -\frac{4}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} = c - \ln(x^4)$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; +\infty)$ je $\ln\sqrt{(z^2+1)^3(z+1)^2} \in (-\infty; +\infty)$, tedy opět $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$.. Označíme-li $e^c = k > 0$, dostaneme rovnici $(z^2+1)^3(z+1)^2 = \frac{k^2}{x^8}$, kterou po přenásobení $x^8$ můžeme dále upravit na tvar $(x^2z^2+x^2)^3(xz+x)^2 = k^2$ Použijeme-li zpětně vztah $y = xz$, dostaneme po přeznačení $c = k^2$ závěrečný implicitní vztah $(y^2+x^2)^3(y+x)^2 = c$, $c \in [0; +\infty)$, který určuje řešení pro $(-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Z tohoto vztahu však můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \pm\sqrt[8]{c}$, a potom $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-(y^2(x)+3xy(x)+4x^2)}{4y^2(x)+3xy(x)+x^2} = -\frac{1}{4}$, tedy implicitní vztah $(y^2+x^2)^3(y+x)^2 = c$ určuje pro každé $c \in [0; +\infty)$ řešení definované na $\mathbb{R}$.

**58)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^3z'(z^2-3) = x^2z(1-z^2)$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$, $z = 0$, $z = 1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \notin \{-1; 0; 1\}$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{-3}{z} + \frac{-1}{1-z} + \frac{1}{1+z}\right) = \frac{1}{x}$. Po integraci a úpravě $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, neboli označíme-li $e^c = k > 0$, potom dostaneme vztah $|\frac{z^2-1}{z^3}| = k|x|$. Pro $z \in (-\infty; -1)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; \frac{2\sqrt{3}}{9}]$, tedy $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9k}; 0)$ nebo $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9k})$, pro $z \in (-1; 0)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, pro $z \in (0; 1)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, a pro $z \in (1; +\infty)$ je $|\frac{z^2-1}{z^3}| \in (-\infty; \frac{2\sqrt{3}}{9}]$, tedy $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9k}; 0)$ nebo $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9k})$. Po zpětné substituci $y = xz$ a přeznačení $c = k$ dostáváme závěrečný implicitní vztah $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$, $c \in [0; +\infty)$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$ a pro $x \in (0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$. (Uvažujeme-li dále výraz $\frac{2\sqrt{3}}{9c}$, mlčky předpokládáme $c > 0$. V případě c=0 tak máme jen řešení pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$) Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve druhém kvadrantu pro případ $z \in [-1; 0)$, neboť potom je $0 < xz \leq x$, a pro případ $z \in (0; 1]$ leží ve třetím kvadrantu, neboť potom je $-x \leq xz < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0;+\infty)$ leží v prvním kvarantu pro případ $z \in [-1;0)$, neboť potom je $-x \le xz < 0$, a pro případ $z \in (0;1]$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť potom je $0 < xz \le x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};0)$ leží ve druhém kvadrantu pro případ $z \in (-\infty;-1]$, neboť potom je $-x \le xz < +\infty$, a pro případ $z \in [1;+\infty)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť potom je $-\infty < xz \le -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0;\frac{2\sqrt{3}}{9c})$ leží ve čtvrtém kvadrantu pro případ $z \in (-\infty;-1]$, neboť potom je $-\infty < xz \le -x$, a pro případ $z \in [1;+\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť potom je $x \le xz < +\infty$. Máme tři typy řešení:

1) Libovolné řešení definované na intervalu $(-\infty;0)$ nebo řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};0)$, pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), jehož graf leží ve druhém kvadrantu, lze spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0;+\infty)$ nebo s řešením definovaným na intervalu $(0;\frac{2\sqrt{3}}{9c})$, pro které $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), jehož graf leží ve čtvrtém kvadrantu, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. (Libovolností řešení máme na mysli, že pro $x < 0$ může být řešení určenou konstantou $c_1$, pro $x > 0$ může být určeno konstantou $c_2$, přičemž může být $c_1 \neq c_2$.) To lze, neboť v takovém případě ze vztahu $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$ pro $x \to 0$ plyne $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$, odkud dostáváme $z \to -1$,a tedy potom $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \lim\limits_{x\to 0} xz(x) = 0$. Navíc (bereme-li příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = -1$, což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu se řešením ze čtvrtého kvadrantu. Obdobně se zdůvodní, že každé řešení definované na intervalu $(-\infty;0)$ nebo řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};0)$, pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je rostoucí), jehož graf leží ve třetím kvadrantu, lze spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0;+\infty)$ nebo s řešením definovaným na intervalu $(0;\frac{2\sqrt{3}}{9c})$, pro které $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je rostoucí), jehož graf leží v prvním kvadrantu, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. Zdůvodnění se liší jen v tom, že ze znalosti $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$ usoudíme $z \to 1$, což bude souhlasit s tím, že spojujeme řešení ze třetího kvadrantu se řešením z druhého kvadrantu. Tímto postupem dostáváme maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty;\frac{2\sqrt{3}}{9c})$, $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ a $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};\frac{2\sqrt{3}}{9c})$.

2) Řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c};0)$, jehož graf leží ve druhém kvadrantu (a které je rostoucí) lze spojit s řešením definovaným na intervalu $(0;\frac{2\sqrt{3}}{9c})$, jehož graf leží v prvním kvadrantu (a které je klesající), pokud je konstanta $c$ různá od nuly a pro $x < 0$ stejná jako pro $c > 0$. V takovém případě totiž z podmínky $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| \to -\infty$ pro $x \to 0$ usoudíme, že $|z| \to +\infty$. Ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ poté můžeme usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = \frac{1}{c}$, a z rovnice

$y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2xy(x)}{3x^2-y^2(x)} = \frac{0}{1/c^2} = 0$. Proto dodefinujeme $y(0) = \frac{1}{c}$. Analogicky lze zdůvodnit, že řešení definované na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; 0)$, jehož graf leží ve třetím kvadrantu (a které je klesající) lze spojit s řešením definovaným na intervalu $(0; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$, jehož graf leží ve čtvrtém kvadrantu (a které je rostoucí) (opět stejná nenulová konstanta $c$). Rozdíl bude jen takový, že ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ usoudíme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = -\frac{1}{c}$, a proto dodefinujeme $y(0) = -\frac{1}{c}$. Opět bude platit $y'(0) = 0$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na intervalu $(-\frac{2\sqrt{3}}{9c}; \frac{2\sqrt{3}}{9c})$.
3) Stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ spojíme v bodě $x = 0$ hodnotou $y(0) = 0$ se stacionárním řešením $y(x) = 0$ pro $x \in (0; +\infty)$. Dostaneme tak maximální řešení definované na $\mathbb{R}$. Jiné spojování řešení již možné není, protože ze vztahu $\ln|\frac{z^2-1}{z^3}| = \ln|x| + c$ dostáváme pro $x \to 0$, že $z \to a$, kde $a \in \{-\infty; -1; 1; +\infty\}$ a ze vztahu $|\frac{y^2-x^2}{y^3}| = c$ dostáváme pro $x \to 0$, že $y \to 0$ nebo $y \to \frac{1}{c}$, a všechny tyto možnosti jsme již probrali.
Poznámka: Body $x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9c}$ odpovídají hodnotám $y = \pm\frac{2}{3c}$ které leží v množině $y^2 - 3x^2 = 0$, kde si rovnice vynucuje $|y'(x)| = +\infty$.

**59)** Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \neq 0\}$. Substitucí $y = xz$, $z \neq -1$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^2z'(z + 1) = x(1 - z)$. Rovnici řešíme pro $x \neq 0$ a bez podmínky $z \neq -1$, kterou budeme v průběhu řešení používat nebo nepoužívat dle potřeby. Stacionární řešení $z = 1$ na $\mathbb{R}$. Po úpravě pro $z \neq 1$ máme $z'\left(1 + \frac{2}{z-1}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $z + 2\ln|z - 1| = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 1) \setminus \{-1\}$ je $z + 2\ln|z - 1| \in (-\infty; \ln\frac{4}{e})$, tedy $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$ nebo $x \in (\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$, a pro $z \in (1; +\infty)$ je $z + 2\ln|z - 1| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po úpravě vztahu máme $z + 2\ln|xz - x| = c + \ln|x|$. Dosadíme-li $z = \frac{y}{x}$, dostaneme po drobné úpravě závěrečný implicitní vztah $y + 2x\ln|y - x| = x\ln|x| + cx$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, pro $x \in (0; +\infty)$ a pro $x \in (\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$. Dále máme řešení $y(x) = x$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (1; +\infty)$, a tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (1; +\infty)$, a tedy $-x < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$ leží ve druhém kvadrantu a ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty; 1)$, a tedy $x < xz < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu a ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty; 1)$, a tedy $-\infty < xz < x$. Řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$, resp. na intervalu $(0; +\infty)$ nelze v bodě $x = 0$ navázat, neboť ze vztahu $z+2\ln|z-1| = c-\ln|x|$ pro $x \to 0$ dostáváme $z+2\ln|z-1| \to +\infty$, odkud můžeme usoudit, že $z \to +\infty$, a ze vztahu $z+2\ln|y-x| = \ln|x|+c$ máme $2\ln|y-x| = \ln|x|+c-z$, tedy pro $x \to 0$ dostáváme $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Potom ale $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = +\infty$. Pro řešení definovaná na intervalu $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, resp. $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ můžeme ze vztahu $z+2\ln|z-1| = c - \ln|x|$ s vědomostí $z \in (-\infty; 1)$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = -1$, což je ale vyloučená hodnota. Tedy maximální řešení jsou řešení určená implicitním vztahem definovaná na intervalech $(-\infty; 0)$, $(-\infty; -\frac{1}{4}e^{c+1})$, $(\frac{1}{4}e^{c+1}; +\infty)$ a $(0; +\infty)$, a řešení $y(x) = x$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, které nejde v bodě $x = 0$ napojit, neboť máme prodmínku $x + y \neq 0$.

**60)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^2zz' = -x(z+1)^2$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = -1$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq -1$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; -1)$ je $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \in (-\infty; +\infty)$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, a pro $z \in (-1; +\infty)$ je $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \in [1; +\infty)$, tedy $x \in (-e^{c-1}; 0)$ nebo $x \in (0; e^{c-1})$. Použijeme-li zpětnou substituci $y = xz$, obdržíme závěrečný implicitní vztah $\frac{x}{x+y} + \ln|x+y| = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-e^{c-1}; 0)$ a pro $x \in (0; e^{c-1})$. Dále máme řešení $y(x) = -x$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve druhém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-\infty; -1)$, a tedy $-x < zx < +\infty$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě máme $z \in (-\infty; -1)$, a tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-e^{c-1}; 0)$ leží ve druhém kvadrantu a ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-1; +\infty)$, tedy $-\infty < xz < -x$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; e^{c-1})$ leží v prvním kvadrantu a ve čtvrtém kvadrantu, neboť v tomto případě $z \in (-1; +\infty)$, tedy $-x < xz < +\infty$. Máme dva typy řešení:

1) Libovolné řešení ze druhého kvadrantu (které je klesající), tj. řešení $y(x) = -x$ pro $x \in (-\infty; 0)$ nebo implicitně určené řešení na intervalu $(-e^{c-1}; 0)$ můžeme spojit s libovolným řešením ze čtvrtého kvadrantu, tj. s řešením $y(x) = -x$ pro $x \in (0; +\infty)$ nebo s implicitně určeným řešením na intervalu $(0; e^{c-1})$, přičemž konstanta $c$ pro $x < 0$ se může lišit od konstanty $c$ pro $x > 0$. Ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ usoudíme pro $x \to 0$, že $z \to -1+$, a ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|x+y| = c$ můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Dodefinujeme-li $y(0) = 0$, potom (bereme-li příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = -1$,

což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu s řešením ze čtvrtého kvadrantu. Dostáváme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty; e^{c-1})$, $(-e^{c-1}; +\infty)$ a $(-e^{c-1}, e^{c-1})$.
2) Řešení z prvního kvadrantu definované na intervalu $(0; e^{c-1})$ můžeme spojit s řešením z druhého kvadrantu definovaným na intervalu $(-\infty; 0)$, pokud je v obou případech určeno stejnou hodnotou konstanty $c$. Ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ nyní usoudíme pro $x \to 0$, že $|z| \to +\infty$, a ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|x+y| = c$ poté můžeme pro $x \to 0$ usoudit, že $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = e^c$. Dodefinujeme-li $y(0) = e^c$, potom (bereme-li příslušné jednostranné derivace) máme $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+2y(x)}{-y(x)} = \frac{2e^c}{-e^c} = -2$, což souhlasí s tím, že spojujeme klesající řešení. Analogicky lze zdůvodnit, že řešení ze třetího kvadrantu definované na intervalu $(-e^{c-1}; 0)$ můžeme spojit s řešením ze čtvrtého kvadrantu definovaného na intervalu $(0; +\infty)$, pokud je v obou případech určeno stejnou hodnotou konstanty $c$. Dodefinujeme $y(0) = -e^c$, a podle předchozího postupu nám vyjde $y'(0) = 2$, což souhlasí s tím, že spojujeme rostoucí řešení. Dostáváme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty; e^{c-1})$ a $(-e^{c-1}; +\infty)$. Pro tato řešení platí: $\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} y(x) = 0$, neboť ze vztahu $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| = c - \ln|x|$ pro $x \to \pm e^{c-1}$ plyne $\frac{1}{z+1} + \ln|z+1| \to 1$, což je pro $z \in (-1; +\infty)$ možné, jen pokud $z \to 0$, a odtud $\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} y(x) = \lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} xz(x) = 0$. Potom ale $|y'(\pm e^{c-1})| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} \frac{x+2y(x)}{-y(x)}| = |\lim\limits_{x\to\pm e^{c-1}} (-\frac{x}{y(x)} - 2)| = +\infty$.

**61)** Řešíme pro $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x^4(1+z^3)z' = -x^3z^4$. Dále řešíme pro $x \neq 0$. Stacionární řešení $z = 0$ na $\mathbb{R}$. Pro $z \neq 0$ dostáváme po dalších úpravách rovnici $z'\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^4}\right) = -\frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $z \in (-\infty; 0)$ je $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \in [\frac{1}{3}; +\infty)$, tedy $x \in (-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ nebo $x \in (0; e^{c-\frac{1}{3}})$, a pro $z \in (0; +\infty)$ je $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \in \mathbb{R}$, tedy $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$. Po úpravě vztahu máme $\ln|xz| - \frac{x^3}{3(xz)^3} = c$. Použijeme-li zpětnou substituci $y = xz$, dostaneme závěrečný implicitní vztah $\ln|y| - \frac{x^3}{3y^3} = c$, $c \in \mathbb{R}$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; 0)$, pro $x \in (0; +\infty)$, pro $x \in (-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ a pro $x \in (0; e^{c-\frac{1}{3}})$. Dále máme stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ a pro $x \in (0; +\infty)$. Graf řešení definovaného na intervalu $(-\infty; 0)$ leží ve třetím kvadrantu, neboť v tomto případě je $z > 0$, tedy i $y < 0$. Graf řešení definovaného na intervalu $(0; +\infty)$ leží v prvním kvadrantu, neboť v tomto případě je $z > 0$, tedy i $y > 0$. Naopak grafy řešení definovaných na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (resp. $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$) leží ve druhém (resp. čtvrtém) kvadrantu, neboť v tomto případě je $z < 0$, a tedy $y > 0$ (resp. $y < 0$). Máme dva typy řešení:

1) Libovolné řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (mající graf ve druhém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), nebo stacionární řešení $y(x) = 0$ pro $x \in (-\infty; 0)$ můžeme v bodě $x = 0$ spojit s libovolným řešením definovaným na intervalu $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$ (majícím graf ve čtvrtém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0+} y(x) = 0$ (tj. které je klesající), nebo se stacionárním řešením $y(x) = 0$ pro $x \in (0; +\infty)$, přičemž dodefinujeme $y(0) = 0$. (Libovolností řešení máme na mysli, že pro $x < 0$ může být řešení určenou konstantou $c_1$, pro $x > 0$ může být určeno konstantou $c_2$, přičemž může být $c_1 \neq c_2$.) To lze, neboť v takovém případě platí (bereme příslušné jednostranné derivace) $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{y(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0$, protože ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0$ plyne, že $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$, a protože navíc víme, že $z < 0$, musí nutně $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0-$ (ve smyslu, že se $z(x)$ blíží k nule ze záporných hodnot, což souhlasí s tím, že spojujeme řešení z druhého kvadrantu se řešením ze čtvrtého kvadrantu), a protože potom ze vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$ plyne, že platí-li $\lim\limits_{x\to 0} z(x) = 0-$, potom nutně $\lim\limits_{x\to 0} y(x) = 0$. Dostáváme tak maximální řešení definovaná na intervalech $(-\infty; e^{c-\frac{1}{3}})$, $(-e^{c-\frac{1}{3}}; +\infty)$, $(-\infty; +\infty)$ (použijeme-li stacionární řešení) a $(-e^{c-\frac{1}{3}}; e^{c-\frac{1}{3}})$.
2) Řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; 0)$ (mající graf ve druhém kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (tj. které je rostoucí), můžeme v bodě $x = 0$ spojit řešením definovaným na intervalu $(0; +\infty)$ (majícím graf v prvním kvadrantu a které je rostoucí), pokud je konstanta $c$ pro $x < 0$ stejná jako pro $x > 0$. To lze, neboť: a) pro řešení z druhého kvadrantu ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0-$ dostáváme $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$ a odtud s vědomostí $z < 0$ $z(x) \to -\infty$, což implikuje při použití vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$, že $\lim\limits_{x\to 0-} |y(x)| = e^c$, a tedy i $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (jsme ve druhém kvadrantu, kde $y > 0$); b) pro řešení z prvního kvadrantu ze vztahu $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} = c - \ln|x|$ pro $x \to 0+$ dostáváme $\ln|z| - \frac{1}{3z^3} \to +\infty$ a odtud s vědomostí $z > 0$ $z(x) \to +\infty$, což implikuje při použití vztahu $\ln|y| - \frac{1}{3z^3} = c$, že $\lim\limits_{x\to 0+} |y(x)| = e^c$, a tedy i $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = e^c$ (jsme v prvním kvadrantu, kde $y > 0$); c) bereme-li příslušené jednostranné derivace, pak $y'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 y}{x^3+y^3} = \frac{0}{0+e^c} = 0$. Dostaneme tak maximální řešení definované na intervalu $(-e^{c-\frac{1}{3}}; +\infty)$. Analogicky lze zdůvodnit, že Řešení definované na intervalu $(-\infty; 0)$ (mající graf ve třetím kvadrantu), pro které $\lim\limits_{x\to 0-} y(x) = -e^c$ (tj. které je rostoucí), můžeme v bodě $x = 0$ spojit s řešením definovaným na intervalu $(0; e^{c-\frac{1}{3}})$ (majícím graf ve čtvrtém kvadrantu a které je rostoucí) (opět pro stejnou konstantu $c$).

Změna oproti předchozímu zdůvodnění bude jedině taková, že z poznatku $\lim\limits_{x\to 0\mp} |y(x)| = e^c$ usoudíme $\lim\limits_{x\to 0\mp} y(x) = -e^c$, protože $y < 0$. Dostaneme tak maximální řešení definované na intervalu $(-\infty; e^{c-\frac{1}{3}})$.
Poznámka: Body $x = \pm e^{c-\frac{1}{3}}$ odpovídají hodnotám $y = \mp e^{c-\frac{1}{3}}$ které leží v množině $x^3 + y^3 = 0$, kde si rovnice vynucuje $|y'(x)| = +\infty$.

**62)** Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y \neq 0\}$. Substitucí $y = xz$, $z \neq -\frac{1}{2}$, $y' = z+xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $x(\frac{2z}{z^2+1} + \frac{1}{z^2+1})z' = -2$. Rovnici řešíme pro $x \neq 0$. Po integraci $\ln(z^2 + 1) - \operatorname{arctg} z = c - 2\ln|x|$, $c \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ se pravá strana blíží k $+\infty$, tedy na levé straně $z \to +\infty$. Po úpravě a zpětném dosazení $y = xz$ dostaneme implicitní vztah $\ln(x^2 + y^2) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = c$, který určuje řešení pro $x \in (-\infty; -2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}})$, pro $x \in (-2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}; 0)$, pro $x \in (0; 2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}})$ a pro $x \in (2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}; +\infty)$. Pro $x \to 0$ máme $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \to \frac{\pi}{2}$ a tedy $y \to \pm e^{\frac{c}{2}-\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy z rovnice $y' = \frac{y-2x}{x+2y} \to \frac{1}{2}$. Řešení lze tedy navázat v bodě $x = 0$ pro stejnou hodnotu konstanty $c$. Vyloučené hodnoty $x \neq \pm 2\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$ odpovídají hodnotám $y \neq \mp\sqrt{\frac{1}{5}e^{c-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}}$, jež leží na vyloučené přímce $x + 2y = 0$.

**63)** Řešíme pro $x \neq 0$. Substitucí $y = xz$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $xz' = 1 + z$. Stacionární řešení $z = -1$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pro $z \neq -1$ máme $\frac{z'}{z+1} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\ln|z + 1| = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$. Po úpravě $z = cx - 1$, $c \in \mathbb{R}$. Protože $y = xz$, dostáváme $y = cx^2 - x$.
Závěr:

$$y(x) = cx^2 - x,\ x \in (-\infty; 0) \text{ nebo } x \in (0; +\infty),\ c \in \mathbb{R}$$

**64)** Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \ \&\ \frac{y}{x} > 0\}$. Substitucí $y = xz$ $(z > 0)$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $xz' = z(\cos(\ln z) - 1)$. Stacionární řešení $z = e^{2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$. Pro $z \in (e^{2k\pi}; e^{2(k+1)\pi})$ máme $\frac{z'}{z(\cos(\ln z)-1)} = \frac{1}{x}$. Po integraci $\operatorname{cotg} \frac{\ln z}{2} = \ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$ ($\int \frac{dz}{z(\cos(\ln z)-1)} = \int \frac{du}{\cos u - 1}$, $u = \ln z$). Po úpravě $\ln \frac{z}{2} = k\pi + \operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)$. Odtud $z = \exp\bigl(2k\pi + 2\operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)\bigr)$, tedy $y = x\exp\bigl(2k\pi + 2\operatorname{arccotg}(c + \ln|x|)\bigr)$, $x \in (-\infty; 0)$ nebo $x \in (0; +\infty)$, $c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

**65)** Řešíme na množině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \neq 0 \ \&\ x \cdot y > 0\}$. Substitucí $y = xz$ $(z > 0)$, $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $|x|z' = \sqrt{z}$, neboli $\frac{z'}{\sqrt{z}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x}$. Po integraci $2\sqrt{z} = \operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, pro $\operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c > 0 \Leftrightarrow |x|^{\operatorname{sgn} x} \geq e^{-c}$. Odtud $z = \left(\frac{\operatorname{sgn}(x)\ln|x|+c}{2}\right)^2 =$

$\left(\operatorname{sgn}(x)(\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{c}{2}\operatorname{sgn}(x))\right)^2$, a tedy $y = x(\ln\sqrt{|x|} + \frac{c}{2})^2$, $c \in \mathbb{R}$. Závěr:

$$y(x) = x\left(\ln\sqrt{|x|} + \frac{c}{2}\right)^2, \ x \in (-e^{-c}; 0) \text{ nebo } x \in (e^{-c}; +\infty),\ c \in \mathbb{R}$$

**66)** Řešíme na množině $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \geq |y|\}$. Substitucí $y = xz$ ($|z| \leq 1$), $y' = z + xz'$ převedeme zadanou rovnici po úpravách na tvar $|x|z' = \sqrt{1-z^2}$. Stacionární řešení $z = \pm 1$ pro $x \in \mathbb{R}$. Dále řešíme pro $z \in (-1; 1)$. Máme $\frac{z'}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{\operatorname{sgn} x}{x}$. Po integraci $\arcsin z = \operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c$, $c \in \mathbb{R}$, pro $\operatorname{sgn}(x)\ln|x| + c \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow |x|^{\operatorname{sgn} x} \in (e^{-c-\frac{\pi}{2}}; e^{-c+\frac{\pi}{2}})$. Po úpravě $z = \sin(c + \operatorname{sgn}(x)\ln|x|)$, tedy $y = x\sin(c + \operatorname{sgn}(x)\ln|x|)$. Řešení lze napojit v bodech $x = \pm\exp(-c - \frac{\pi}{2})$. Závěr:

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty; -e^{c+\frac{\pi}{2}}) \\ x\sin(c - \ln(-x)), & x \in [-e^{c+\frac{\pi}{2}}, -e^{c-\frac{\pi}{2}}) \\ x, & x \in [-e^{c-\frac{\pi}{2}}; +\infty) \end{cases}$$

$$c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

$$y(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty; e^{-c-\frac{\pi}{2}}) \\ x\sin(c + \ln x), & x \in [e^{-c-\frac{\pi}{2}}; e^{-c+\frac{\pi}{2}}) \\ x, & x \in [e^{-c+\frac{\pi}{2}}; +\infty) \end{cases}$$

$$c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$