Obecné lineární problémy

Variace konstant

V kapitolách o soustavách lineárních rovnic a o lineárních rovnicích n-tého řádu jsme se naučili řešit rovnice (soustavy) s nulovou pravou stranou, resp. s pravou stranou ve speciálním tvaru. V této kapitole se naučíme řešit rovnice s obecnou pravou stranou.

Uvažujme lineární diferenciální rovnici řádu n, tj.

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = f(t)\,. \tag{1}$$

kde $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce, $a_i : (a, b) \to \mathbb{R}$ koeficienty rovnice, $a_0(t) \neq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$ a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je pravá strana.

Při značení

$$\mathscr{L}[y] = \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(n-k)}$$

můžeme rovnici (1) přepsat jako

$$\mathscr{L}[y] = f. \tag{2}$$

$\mathscr{L}$ je v tomto případě lineární zobrazení z $V := C^n((a, b), \mathbb{R})$ do $W := C((a, b), \mathbb{R})$.

Uvažujme nyní soustavu rovnic, kterou můžeme zapsat ve vektorovém tvaru (viz kapitola o soustavách lineárních rovnic)

$$Y' - A(t)Y = F(t), \tag{3}$$

kde $Y : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ je neznámá funkce, $A : (a, b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ matice koeficientů soustavy a $F : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ pravá strana. Při značení

$$\mathscr{L}[Y] = Y' - A(x)Y \tag{4}$$

můžeme rovnici (3) přepsat jako $\mathscr{L}[Y] = F$. $\mathscr{L}$ je v tomto případě lineární zobrazení z $V := C^1((a, b), \mathbb{R}^n)$ do $W := C((a, b), \mathbb{R}^n)$.

V následujícím můžeme tedy hovořit o obou úlohách najednou, f a y může být nahrazeno F a Y. Speciální případ $f = 0$ je tzv. *homogenní úloha*

$$\mathscr{L}[y] = 0\,. \tag{5}$$

Připomeňme následující větu:

Věta 1 (Prostor řešení)**.** *1. Množina všech řešení homogenní rovnice* (5) *definovaných na intervalu* (a, b) *tvoří vektorový prostor dimenze* n*.*

2. Je-li y_p řešení nehomogenní rovnice (2) *na* (a, b), *pak množina všech řešení rovnice* (2) *na* (a, b) *je* $\{y_p + y : y$ *je řešení* (5) *na* $(a, b)\}$.

První část věty říká, že množina řešení homogenní úlohy (5) tvoří lineární podprostor prostoru V (je to jádro zobrazení $\mathscr{L}$). *Fundamentálním systémem* rovnice (2) rozumíme libovolnou bázi tohoto podprostoru. Jinými slovy fundamentální systém je n-tice funkcí $\{y_1, \dots, y_n\}$ takových, že obecné řešení homogenní úlohy (5) má tvar

$$y_h(t) = c_1 y_1(t) + \cdots + c_n y_n(t)\,, \tag{6}$$

kde c_i jsou reálné konstanty. Druhá část věty říká, že k nalezení obecného řešení (2) stačí určit fundamentální systém a jedno (pevně zvolené) řešení nehomogenní úlohy, tzv. *partikulární řešení.*

Poznámka. Obecný návod, jak nalézt fundamentální systém či partikulární řešení, neexistuje. Pokud však najdeme fundamentální systém, lze nalézt i partikulární řešení ve tvaru

$$y(t) = c_1(t) y_1(t) + \cdots + c_n(t) y_n(t)\,, \tag{7}$$

přičemž určení $c_i(t)$ se redukuje na řešení soustavy n lineárních (algebraických) rovnic a následnou integraci. Tato metoda se nazývá *variace konstant.*

Věta 2 (Variace konstant pro rovnice n-tého řádu)**.** *Nechť* $\{y_1, \dots, y_0)\}$ *je fundamentální systém rovnice* (1). *Nechť* $c_1(t), \dots, c_n(t)$ *splňují pro* $\forall t \in (a, b)$ *soustavu (pro přehlednost proměnnou x vynecháváme)*

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \dots c_n' y_n &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \dots c_n' y_n' &= 0 \\ &\vdots \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \dots c_n' y_n^{(n-2)} &= 0 \\ c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \dots c_n' y_n^{(n-1)} &= \frac{f}{a_0}\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Potom funkce (7) *je řešením úlohy* (1).

Věta 3 (Variace konstant pro soustavy rovnic)**.** *Nechť* $\{Y_1, \dots, Y_n)\}$ *je fundamentální systém soustavy* (3). *Nechť* $c_1(t), \dots, c_n(t)$ *splňují pro* $\forall x \in (a, b)$ *soustavu (pro přehlednost proměnnou x vynecháváme)*

$$c_1' Y_1 + c_2' Y_2 + \cdots + c_n' Y_n = F \tag{9}$$

Potom funkce $Y(t) = c_1(t) Y_1(t) + \cdots + c_n(t) Y_n(t)$ *je řešením úlohy* (3).

Poznámka. Zdůrazněme, že variace konstant funguje pro obecnou rovnici typu (1) a (3), třebaže se obvykle používá jen pro rovnice a soustavy s konstantními koeficienty, neboť tam umíme efektivně sestrojit fundamentální systém.

Poznámka. Na závěr úvodního textu poznamenejme, že rovnice n-tého řádu (1) je „ekvivalentní“ se soustavou rovnic (3), kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & -\frac{a_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Ekvivalentní v následujícím smyslu: Je-li y řešení (1) a definujeme-li $Y(t) := (y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$, pak Y je řešení (3). A naopak, jestliže Y je řešení (3), pak první souřadnice Y_1 je řešením rovnice (1). (Rozmyslete si podrobně)

Příklad 1. Najděte partikulární řešení rovnice $y'' + y = 1/\cos t$.

Řešení. Fundamentální systém je $\{\cos t, \sin t\}$, tj. partikulární řešení hledáme ve tvaru $c_1(t)\cos x + c_2(t)\sin t$. Soustava (9) se zde redukuje na

$$\begin{aligned} c_1' \cos t + c_2' \sin t &= 0 \\ -c_1' \sin t + c_2' \cos t &= \frac{1}{\cos t}\,. \end{aligned}$$

Vyřešíme (šikovný trik je násobit první rovnici $\cos t$, druhou $-\sin t$): $c_1' = -\sin t/\cos t$, $c_2' = 1$. Integrace dává

$$c_1(t) = \ln|\cos t|\,, \qquad c_2(t) = t\,.$$

Výsledek platí na intevalech nenulovosti $\cos t$, tj. $\big((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\big)$.

Příklad 2. Řešme úlohu $y''' - y' = \frac{e^t}{1+e^t}$.

Řešení. Fundamentální systém: $\{1, e^t, e^{-x}\}$. Partikulární řešení hledáme ve tvaru $c_1(t) + c_2(t)e^t + c_3(t)e^{-x}$. Systém pro c_i' se redukuje na

$$\begin{aligned} c_1' + c_2' e^t + c_3' e^{-t} &= 0 \\ c_2' e^t - c_3' e^{-t} &= 0 \\ c_2' e^t + c_3' e^{-t} &= \frac{e^t}{1+e^t}\,. \end{aligned}$$

Řešení je

$$c_1'(t) = -\frac{e^t}{1+e^t}\,, \qquad c_2'(t) = 1/2\,\left(1+e^t\right)^{-1}\,, \qquad c_3'(t) = 1/2\,\frac{e^{2\,t}}{1+e^t}\,.$$

Integrace dává

$$c_1(t) = -\ln(1+e^t)\,, \qquad c_2(t) = -1/2\,\ln(1+e^t) + 1/2\,\ln(e^t)\,,$$
$$c_3(t) = 1/2\,e^t - 1/2\,\ln(1+e^t)\,.$$

Příklad 3. Najděte řešení následující soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} y' &= 3y - 6z + \frac{e^{2t}}{2+e^t}\,, \\ z' &= y - 2z\,. \end{aligned}$$

Řešení. Řešme nejprve homogenní soustavu

$$\begin{pmatrix} \lambda-3 & 6 \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \lambda^2-\lambda \\ -1 & \lambda+2 \end{pmatrix},$$

tedy $z(t) = ce^t + d$ a $y(t) = z' + 2z = 3ce^t + 2d$. Věta 3 nám dává

$$\begin{aligned} 3c'(t)e^t + 2d'(t) &= \frac{e^{2t}}{2+e^t} \\ c'(t)e^t + d'(t)e^{-t} &= 0, \end{aligned}$$

odtud $c(t) = \int \frac{e^t}{2+e^t}dt = \ln(2+e^t)$, $d(t) = -\int \frac{e^{2t}}{2+e^t}dt = -e^t + 2\ln(2+e^t)$. Výsledek tedy je:

$$\begin{aligned} y(t) &= 3ce^t + 2d + 3e^t\ln(2+e^t) - 2e^t + 4\ln(2+e^t) \\ z(t) &= ce^t + d + e^t\ln(2+e^t) - e^t + 2\ln(2+e^t). \end{aligned}$$