



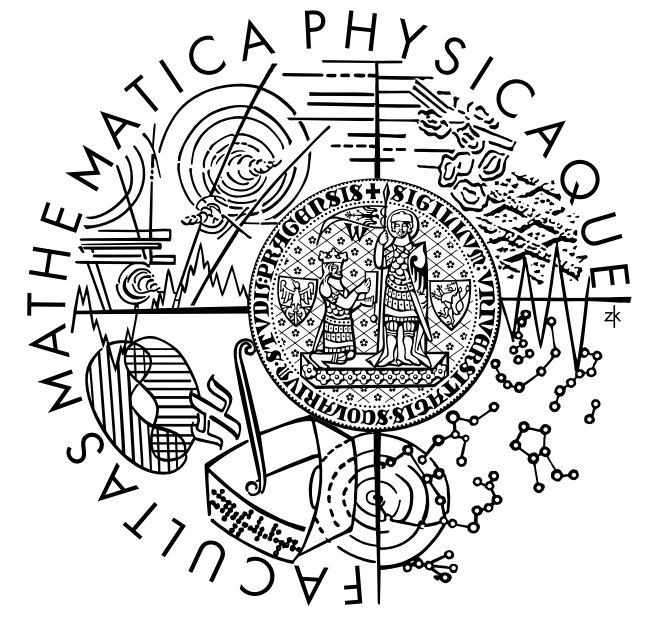
Vektorové autoregresní modely

Petr Jonáš

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE

Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

email: petr.jonas@centrum.cz



Abstrakt: Cílem této práce bylo shrnutí současného stavu problematiky vektorových autoregresních (VAR) modelů využívaných především v dnešní ekonometrii, popsat vhodný software pro příslušné aplikace těchto modelů a ilustrace jejich využití. V práci jsou dále popsány integrované procesy, princip kointegrace a VEC modely, které jsou vhodnou modifikací VAR pro kointegrované procesy. Věnuje se také problému Grangerovy a vícekrokové kauzality, analýze impulzních odezví a rozkladu chyby předpovědi v kontextu VAR modelů. Vše je doplněno ilustrativními příklady s reálnými daty zpracovanými v programu EViews.

VAR MODEL.

Od počátku osmdesátých let 20. století se VAR modely (nebo jejich modifikace) staly jedním z důležitých nástrojů pro makroekonomické modelování. Hlavními důvody byla jejich jednoduchost (jedná se o lineární modely) a vysoká kvalita předpovědí. Nejčastěji bývá VAR(p) model zapisován následovně

$$Y_t = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + U_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

kde A_1, \dots, A_p ($A_p \neq 0$) $\in \mathbb{R}^{K \times K}$, $\nu \in \mathbb{R}^K$, $U_t \sim WN(0, \Sigma_U)$.

Stacionární procesy. V analýze časových řad hrají důležitou roli stacionární časové řady. V kontextu VAR modelů často uvažujeme restriktivnější podmínku stability.

$$\det(I_K - A_1 z - A_2 z^2 + \dots + A_p z^p) = \det(A(z)) \neq 0 \quad \forall z : |z| \leq 1.$$

Teoretické výsledky jsou často odvozeny jen pro stabilní procesy.

Odhad parametrů. Řád modelu p , ani matice koeficientů ν, A_1, \dots, A_p většinou nejsou předem známy, a proto je musíme odhadnout. K odhadu řádu lze využít jednu z následujících možností:

- postupné testování nulovosti matic koeficientů; viz [1].
- informační kritérium (Akaike, Schwarz, Hannan-Quinn).

Matice koeficientů se odhadují metodou nejmenších čtverců (LS) nebo metodou maximální věrohodnosti (ML). Za předpokladu normalního rozdělení bílého šumu dávají obě metody stejný odhad, který je konzistentní.

VEC MODEL.

VEC (*vector error correction*) modely jsou modifikací VAR modelů, kterou lze s výhodou využít pro kointegrované časové řady. (Nestacionární časové řady se společným trendem + nestacionaritou lze odstranit diferencováním.) V práci se zabýváme pouze procesy, kde je možné dosáhnout stacionarity použitím prvních diferencí. VEC model získáme z VAR(p) následovně

$$Y_t - Y_{t-1} = \nu + A_1 Y_{t-1} + A_2 Y_{t-2} + \dots + A_p Y_{t-p} + U_t - Y_{t-1}$$

$$\Delta Y_t = \Pi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p+1} + U_t.$$

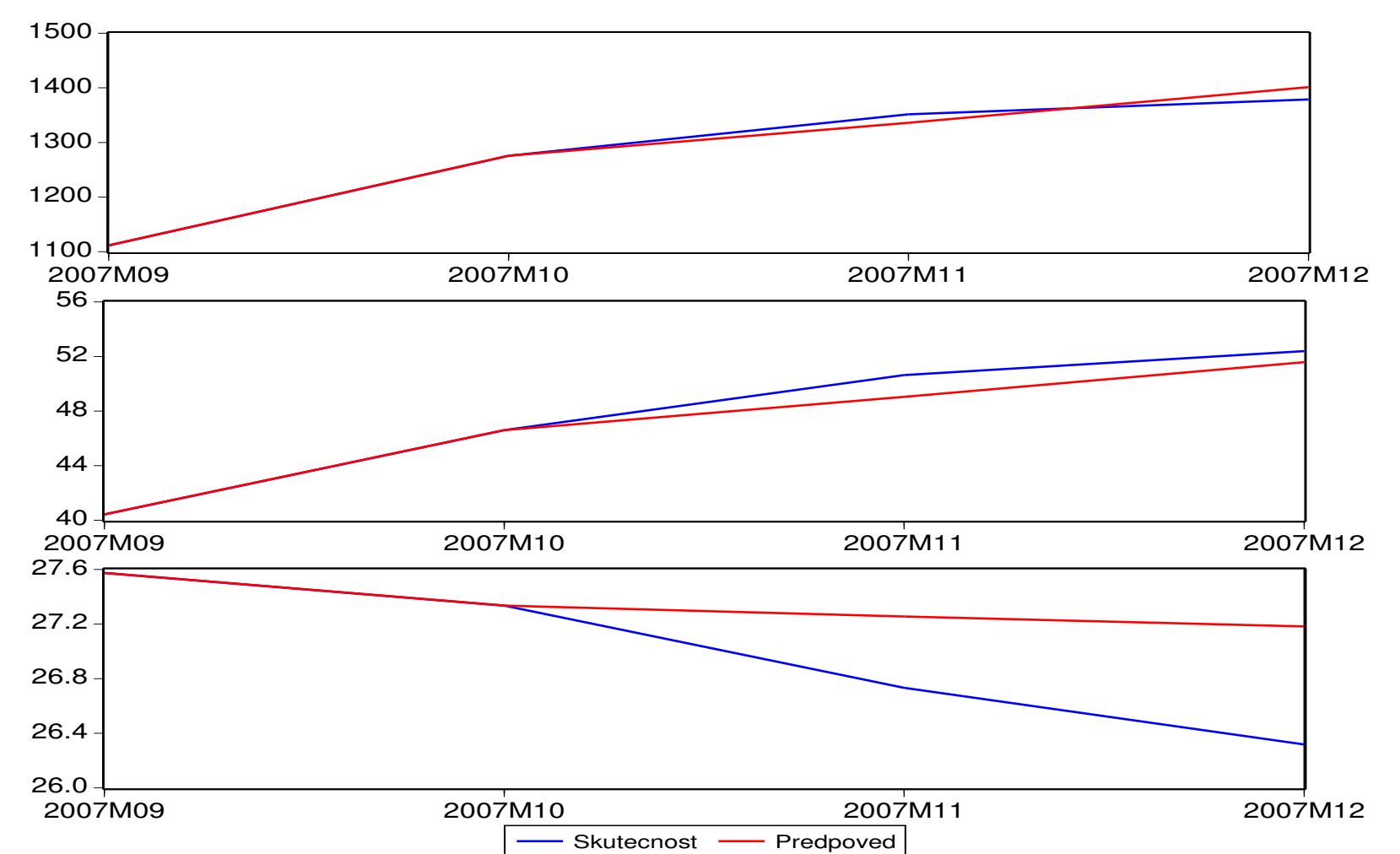
$$\Gamma_i := -(A_{i+1} + \dots + A_p), \quad i = 1, \dots, p-1$$

$$\Gamma := \sum_{i=1}^{p-1} \Gamma_i - I$$

$$\Pi := -(I - A_{i+1} - \dots - A_p).$$

Protože se zabýváme pouze procesy, kde je možné dosáhnout stacionarity použitím prvních diferencí, jsou všechny členy $\Gamma_i \Delta Y_{t-i}$ stacionární. Aby byl zápis modelu korektní, musí být stacionární i člen ΠY_{t-1} . Tím jsme získali lineární kombinaci původního nestacionárního procesu stacionární proces; viz [2].

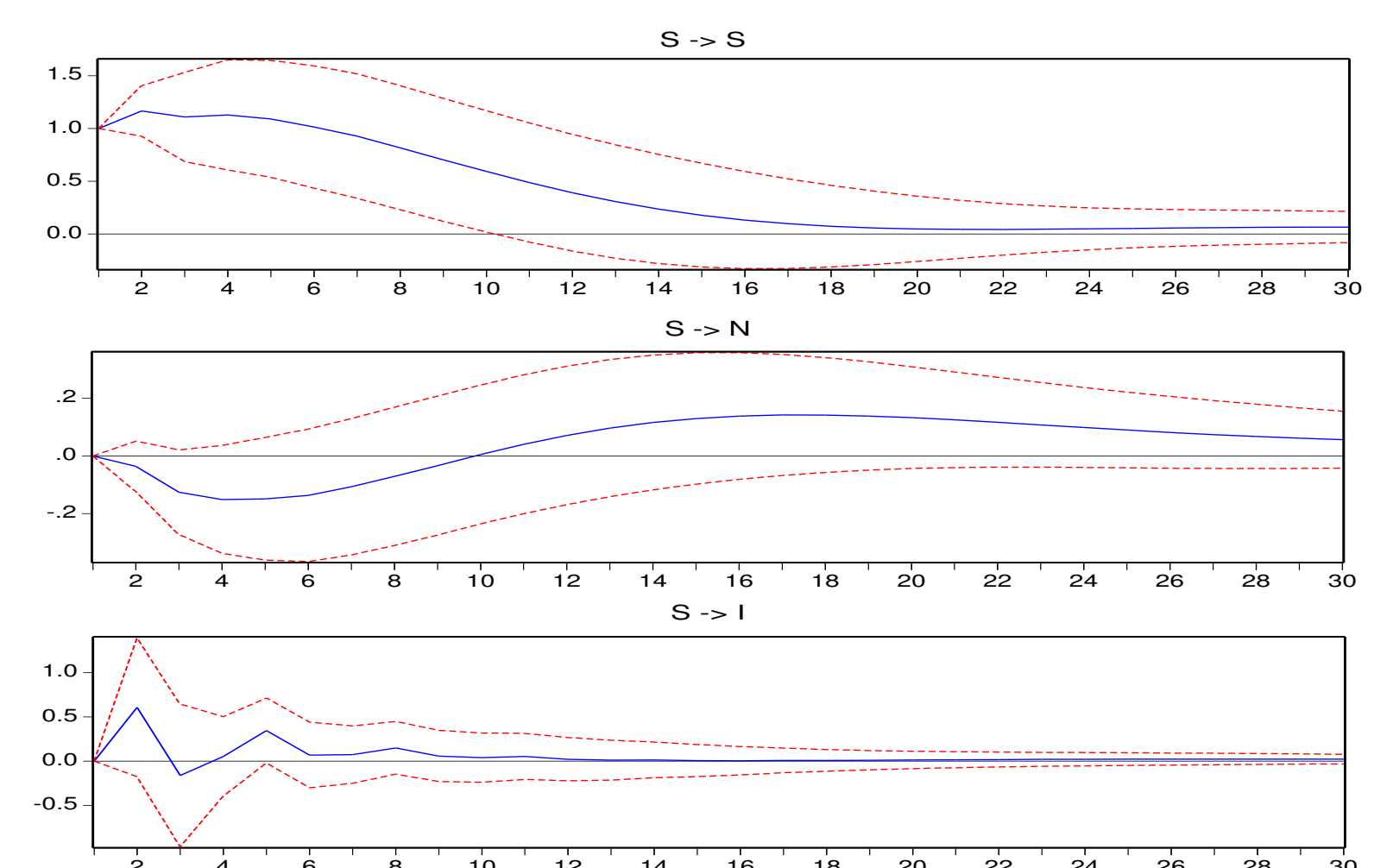
Ilustrace. Příkladem toho, jak kvalitní předpovědi můžeme pomocí VAR modelů získat je následující obrázek. Na obrázku můžeme vidět předpovědi měsíčních průměrů závěrečných cen pro akcie ČEZu na burze v Praze, ve Frankfurtu a kurzu CZK/EUR na období listopad a prosinec 2007. K odhadu byl použit VEC model a data z období březen 2003 - prosinec 2007. Podrobněji je příklad řešen v práci [3].



ANALÝZA STRUKTURY.

Často nás zajímají vzájemné vztahy mezi proměnnými zahrnutými do modelu. K tomuto účelu se používá například Grangerova kauzalita (zjišťujeme zda určitá část proměnných pomáhá "vylepšit" předpověď ostatních) nebo analýza odezví na impuls (*impulse response analysis*). Analýzu odezví na impuls použijeme, pokud potřebujeme zjistit, jak by budoucí chování veličin ovlivnila neočekávaná změna některé z nich, např. zvýšení o jednu jednotku. Změna chování úzce souvisí s koeficienty MA reprezentace; viz [1]. Nejčastěji se k analýze odezví na impuls používá grafické vyjádření.

Ilustrace. V práci je pro ilustraci analýzy odezví na impuls použit VAR(3) model americké ekonomiky s proměnnými nezaměstnanost, inflace a úroková sazba FEDu. Na obrázku je znázorněno, jaký vliv by mělo zvýšení úrokové sazby o 1% na ostatní proměnné (za platnosti VAR(3) modelu). Všechny odezvy jsou ve shodě s ekonomickou teorií, navíc je vidět, že tento efekt po čase vymyží. To je důsledek stability našeho modelu.



Poděkování. Rád bych poděkoval Prof. RNDr. Janu Ámosi Víškovi CSc., díky kterému jsem se mohl ROBUSTu 2008 zúčastnit.

Reference.

- [1] Lütkepohl, H. (2005). *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag.
- [2] Johansen, S. (1996). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Model*. Oxford University Press.
- [3] Jonáš P. (2008). *Vektorové autoregresní modely*, Diplomová práce, MFF UK, Praha.