

6. soutěžní série

5. 1. 2026

Úloha 1. Pro kladné celé číslo n označme $f(n) = 1! + 2! + \dots + n!$. Najděte polynomy P a Q , aby platilo

$$f(n+2) = P(n)f(n+1) + Q(n)f(n)$$

pro všechna $n \geq 1$. (5 bodů)

Úloha 2. Najděte minimální hodnotu

$$(u-v)^2 + \left(\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v} \right)^2$$

pro $0 < u < \sqrt{2}$ a $v > 0$. (10 bodů)

Úloha 3. Definujme $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ předpisem

$$f(n) = n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor \quad \forall n \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dokažte, že pro každé kladné celé číslo m , obsahuje posloupnost

$$m, f(m), f(f(m)), f(f(f(m))), \dots$$

druhou mocninu přirozeného čísla. (10 bodů)

Úloha 4. Kouzelníci Hokus a Pokus mají kružnici, jejíž jedna polokružnice je modrá a druhá zelená. Během představení odejde Hokus z místnosti, načež nechá Pokus diváky vyznačit na kružnici sto různých bodů. Pokus následně jeden bod vymaže. Potom se vrátí Hokus a pouze z pozic zbylých 99 bodů určí, jestli ležel vymazaný bod na modré nebo zelené půlkružnici. Dokažte, že jim kouzlo nemůže pokaždé vyjít.

(15 bodů)