6. soutěžní série – řešení

1. $P(n) = n+3, Q(n) = -(n+2)$. Odvodí se například z toho, že $f(n+2) - f(n+1) = (n+2)! = (n+2)(f(n+1) - f(n))$.

2. Chceme najít druhou mocninu vzdálenosti půlkružnice kružnice $y = \sqrt{2 - x^2}$ a větve hyperboly $y = 9/x$, $x > 0$. K tomu stačí najít bod hyperboly nejblíže k počátku, protože pro libovolný bod B vně kružnice je jeho vzdálenost od počátku o poloměr větší než jeho vzdálenost od kružnice (jemu nejbližší bod kružnice leží na spojnici B s počátkem, všechny ostatní body kružnice jsou dle trojúhelníkové nerovnosti dále). Výraz

$$x^2 + \frac{81}{x^2} = \left(x - \frac{9}{x}\right)^2 + 18$$

nabývá minima pro $x = 3$ (a toto minimum je 18, tj. hyperbola leží celá vně kružnice). Sobě nejbližší body hyperboly a půlkružnice jsou tedy $[3, 3]$ a $[1, 1]$. Druhá mocnina vzdálenosti je pak $2^2 + 2^2 = 8$.

3. Každé kladné celé číslo m lze jednoznačně napsat ve tvaru $m = n^2 + k$, kde n je přirozené a $k \in \{0, 1, \ldots, 2n\}$. Předpokládejme pro spor, že existuje kladné celé číslo, jehož posloupnost neobsahuje druhou mocninu. Z těchto čísel si vezměme takové, pro které je k minimální. Jistě $k \neq 0$, protože to by m bylo druhou mocninou. Rozlišme dva případy. Pokud $1 \leq k \leq n$, pak $f(m) = n^2 + k + n$ (zde $n + 1 \leq n + k \leq 2n$) a $f(f(m)) = f(m) + n = n^2 + 2n + k = (n+1)^2 + (k-1)$. Číslo $f(f(m))$ ve své posloupnosti také nemůže obsahovat druhou mocninu, což je ale spor s minimalitou k. Pokud je $n + 1 \leq k \leq 2n$, pak $f(m) = m + n = n^2 + n + k = (n+1)^2 + (k - n - 1)$, což je opět spor s minimalitou k.

4. Jako lemma použijeme nekonečnou Ramseyovu větu: Pokud každé k-prvkové podmnožině nekonečné množiny A přiřadíme jedno z konečně mnoha čísel, pak existuje nekonečná množina $B \subset A$ taková, že každé k-prvkové podmnožině B je přiřazeno stejné číslo.

Pro spor nechť na to mají strategii. BÚNO je deterministická. Buď M modrá a Z zelená půlkružnice. Dokážeme indukcí, že existuje nekonenčná množina $X_k \subset Z$ a $100 - k$ bodů $P_1, \ldots, P_{100-k} \in M$ takové, že když vybereme libovolných k bodů $Q_1, \ldots, Q_k \in X_k$ a vyznačíme body $P_1, \ldots, P_{100-k}$ a $Q_1, \ldots, Q_k$, tak Pokus vymaže nějaký daný (vždy ten samý) bod z $P_1, \ldots, P_{100-k}$.

Základní krok pro $k = 0$ je jasný, $X_k = Z$ a vezmeme libovolné $P_1, \ldots, P_{100} \in M$. Dále indukce z k na $k + 1$.

Pro k BÚNO vybere vždy P_{100-k}. Ukažme, že když na tabuli vyznačíme $P_1, \ldots, P_{99-k}$ a libovolných $k + 1$ bodů z X_k, tak musí Pokus vymazat nějaký z bodů $P_1, \ldots, P_{99-k}$. Kdyby totiž vymazal nějaký ležící v X_k, zůstalo by na tabuli $P_1, \ldots, P_{99-k}$ a k bodů z X_k (a Hokus by musel říct zelená), ale totéž by díky indukčnímu předpokladu na tabuli zůstalo, kdybychom vyznačili $P_1, \ldots, P_{100-k}$ a těch samých k bodů z X_k (a Hokus by musel říct modrá). Hokus by tedy nemohl poznat barvu, takže Pokus musí vymazat něco z $P_1, \ldots, P_{99-k}$. Pokud je $k = 99$, máme již spor, protože nemá co mazat.

Tedy pro každých $k+1$ bodů z X_k vybere nějaký bod z $P_1, \ldots, P_{99-k}$. Podle nekonečné Ramseyovy věty tedy existuje nekonečná množina $X_{k+1} \subset X_k$ taková, že pro každých $k+1$ bodů z X_{k+1} vybere ten stejný bod z $P_1, \ldots, P_{99-k}$. Tím je indukční krok hotov.