

5. soutěžní série

8. 12. 2025

Úloha 1. Na kružnici rozmístíme 111 jablek, některá červená a některá zelená tak, že pokud je někde zelené jablko, pak mezi následujícími třemi jablky (ve směru hodinových ručiček) jsou právě dvě zelená, a pokud je někde červené jablko, pak toto naopak nesmí platit. Ukažte, že všechna rozmístěná jablka jsou červená. (5 bodů)

Úloha 2. Dáno $a \in (0, 1)$. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě v nule, pro něž $f(x) + f(ax) = x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. (10 bodů)

Úloha 3. Tři čtverce $ABCD$, $RATU$ a $WCYZ$ (body uvádíme proti směru hod. ručiček) mají po dvou nejvýše jednobodový průnik. Nechť M je střed úsečky TW . Dokažte, že kolmice na RY vedená bodem M prochází bodem B . (10 bodů)

Úloha 4. Najděte všechna kladná celá čísla $n < 10^{100}$, která splňují zároveň

$$\begin{aligned}n &| 2^n, \\n - 1 &| 2^n - 1, \\n - 2 &| 2^n - 2.\end{aligned}$$

(15 bodů)