5. soutěžní série – řešení

1. Dokazujme sporem. Všechna jablka nemohou být zelená. Pokud jsou zastoupeny obě barvy, pak je za některým zeleným červené. Pak jsou ale další tři jablka nutně zelená, pak další musí být červené a pak zase tři zelená, červené a tak pořád dál, což znamená, že počet jablek musí být dělitelný čtyřmi. To ale 111 není.

2. Pouze $f(x) = \frac{x}{a+1}$. Buď $g(x) = f(x) - \frac{x}{a+1}$, ukážeme $g(x) = 0$. Dostáváme $g(x) + g(ax) = 0$, takže $g(x) = -g(ax) = g(a^2x)$. Odtud $g(x) = g(a^{2n}x)$ pro všechna n, ovšem pokud $n \to \infty$, tak $a^{2n}x \to 0$, takže ze spojitosti f (tedy i g) v nule dostáváme $g(x) = g(0)$, pak $0 = g(x) + g(ax) = 2g(0)$, čili $g(x) = g(0) = 0$.

3. Umístěme body do komplexní roviny: $A = -1$, $B = -i$, $C = 1$, $D = i$, $Y = 1 + x$, $W = 1 + ix$, $R = -1 + y$, $T = -1 - iy$, kde $x, y \in \mathbb{C}$. Pak $M = i(x - y)/2$. Chceme ukázat, že MB je kolmá na RY, neboli že $(M - B)/(R - Y)$ je ryze imaginární, což je (je to $-i/2$).

4. Řešení jsou čísla $n = 2^{2^{2^r}}$, $r = 0, 1, 2, 3$. Protože $n \mid 2^n$, je nutně $n = 2^k$ pro nějaké nezáporné celé k. Podmínka $n - 1 \mid 2^n - 1$ dává $2^k - 1 \mid 2^{2^k} - 1$. Uvědomme si, že $\mathrm{NSD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{NSD}(a,b)} - 1$ (napišme si čísla ve dvojkové soustavě jako a, resp. b jedniček a aplikujme Eukleidův algoritmus). Tedy $k \mid 2^k$, tj. $k = 2^m$. Třetí podmínka $n - 2 \mid 2^n - 2$ dává $2^{2^m} - 2 \mid 2^{2^{2^m}} - 2$, tj. po vydělení dvěma $2^{2^m-1} - 1 \mid 2^{2^{2^m}-1} - 1$. Použitím stejného argumentu jako výše máme $2^m - 1 \mid 2^{2^m} - 1$, tj. $m \mid 2^m$ a $m = 2^r$. Tedy $n = 2^{2^{2^r}}$. Snadno ověříme, že podmínka $n < 10^{100}$ je splněna, právě když $r \leq 3$.

web: http://karlin.mff.cuni.cz/resitel