5. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 15.12.2025

Úloha 1. Je možné pokrýt tabulku 2025×2025 pomocí obdélníků 1×2 a pětipolíčkových křížů tvořených jedním prostředním políčkem a jeho čtyřmi sousedy?

Úloha 2. Pro která přirozená čísla $n \geq 3$ existují po dvou různá kladná celá čísla $a_1, \ldots, a_n$ taková, že $a_i + a_{i+1}$ je mocnina dvou pro všechna $i \in \{1, ..., n\}$? Uvažujeme indexy modulo n, tedy $a_{n+1} = a_1$.

Úloha 3. Sečtěte řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2}.$$

Úloha 4. Nechť $A_1, \ldots, A_n$ jsou vrcholy pravidelného n-úhelníku, l je kružnice opsaná tomuto n-úhelníku a k je taková kružnice, že l leží v jejím vnitřku. Označme X_i, Y_i průsečíky tečny ke kružnici l vedené bodem A_i a kružnice k. Ukažte, že množinu úseček $\{A_iX_i, A_iY_i : \ i = 1, \ldots, n\}$ lze rozdělit na dvě části tak, že součet délek úseček v každé části bude stejný.

Úloha 5. Nechť $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je reálná $n \times n$ matice taková, že $a_{ij}a_{ji} \leq 0$ pro všechna $1 \leq i, j \leq n$. Dokažte, že pokud A má nenulové vlastní číslo, pak alespoň dvě její vlastní čísla nejsou reálná.

$\star$ **Úloha 6.** Nechť R je (nekomutativní) okruh nulové charakteristiky a nechť e, f, g jsou idempotentní prvky splňující $e + f + g = 0$. Ukažte, že $e = f = g = 0$.

---

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`