

4. soutěžní série

24. 11. 2025

Úloha 1. Buď $ABCD$ rovnoběžník se středem O . Dokažte, že pro libovolný bod M na úsečce AB existují jednoznačně určené body N na úsečce OC a P na úsečce OD takové, že O je těžištěm $\triangle MNP$.

(5 bodů)

Úloha 2. Je dána krychle a krychlová krabice (s víkem), do které se krychle přesně vejde. Malíř krychli obarvil stěny krychle, každou jinou barvou. Malířka krabic mezitím obarvila stěny krabice (včetně víka), každou jinou barvou. Malíř i malířka měli k dispozici stejných šest barev, ale stěny obarvili každý, jak chtěl. Dokažte, že můžete vložit krychli do krabice tak, aby každá stěna krychle přiléhala ke stěně krabice odlišné barvy.

(10 bodů)

Úloha 3. Buď $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ spojitá funkce splňující

$$\forall x \in [0, 1] : f(f(x)) = x^2.$$

Dokažte $\forall x \in (0, 1) : x^2 < f(x) < x$.

(10 bodů)

Úloha 4. Uvažujme posloupnost y_2, y_3, \dots definovanou rekurentním předpisem

$$(n+1)(n-2)y_{n+1} = n(n^2 - n - 1)y_n - (n-1)^3 y_{n-1}$$

a počátečními podmínkami $y_2 = y_3 = 1$. Ukažte, že y_n je celé číslo, právě když n je prvočíslo.

(15 bodů)