4. soutěžní série – řešení

1. Lineárně-algebraické: Označme vektory $a = \frac{1}{2}(B - A)$, $c = \frac{1}{2}(C - B)$. O je těžiště MNP právě když $(P - O) + (N - O) + (M - O) = 0$. Máme dáno $M = O - c + \lambda a$, $\lambda \in [-1, 1]$. Hledáme $N = O + x(a + c)$, $P = O + y(c - a)$, $x, y \in [0, 1]$. Tj. řešíme $c+\lambda a+x(a+c)+y(c-a) = 0$. Protože a a c jsou lineárně nezávislé, dostáváme $-1+x+y = 0$, $\lambda + x - y = 0$, což má jediné řešení $x = \frac{1}{2}(1 - \lambda)$, $y = \frac{1}{2}(1 + \lambda)$, $x, y \in [0, 1]$.

Geometrické: Mějme libovolný bod M na úsečce AB a M' buď obraz M ve stejnolehlosti se středem O a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Bod M' leží na spojnici středů úseček OC a OD. Pak O je těžiště MNP, právě když M' je střed NP. Zobrazme OD ve středové souměrnosti podle M' na $O'D'$. Pak O' leží na CD a D' na spojnici O se středem úsečky BC. Pak tedy úsečka $O'D'$ protne úsečku OC v právě jednom bodě, což je jednoznačně určený bod N, bod P bude jeho vzor ve oné středové souměrnosti se středem M'.

2. Je 24 způsobů, jak krychli do krabice vložit (6 možností, která stěna bude nahoře, a 4 možnosti otočení podle svislé osy). Dále máme pro každou barvu 4 možnosti, jak tam krychli vložit, aby ta barva na krychli a na krabici *přiléhala* (v protikladu k zadání). To by bylo celkem 24 možností, aby nějaká barva přiléhala. Dokážeme však, že aspoň dvě z nich jsou totožné, takže je jich méně než 24, a tudíž zbývá nějaká možnost, aby žádná barva nepřiléhala.

Stačí tedy dokázat, že krychli jde vložit tak, aby současně přiléhaly dvě barvy. Uvažme jednu barvu. Na krychli i na krabici sousedí se čtyřmi dalšími a nesousedí jenom s jednou, takže určitě sousedí s některou barvou na krychli i na krabici (ve skutečnosti s třemi). A když máme na krychli i na krabici stejné sousední barvy, můžeme vložit krychli tak, aby přiléhaly obě.

3. Kdyby pro nějaké $x \in (0, 1)$ platilo $f(x) = x$, tak by vyšlo $f(f(x)) = x$, tedy $x = x^2$, což je pro $x \in (0, 1)$ spor. Kdyby pro nějaké $x \in (0, 1)$ platilo $f(x) = x^2$, tak by vyšlo $f(x^2) = x^2$, což je spor podle předchozího (platí totiž $x^2 \in (0, 1)$).

Pokud by pro nějaké $x \in (0, 1)$ platilo $f(x) > x$, tak už by to muselo platit pro všechna x, jinak by podle věty o nabývání mezihodnoty někde muselo platit $f(a) = a$ ($f(x)$ i x jsou totiž spojité). Potom ale dostáváme $f(f(x)) > f(x) > x > x^2$ pro všechna $x \in (0, 1)$, což je spor s $f(f(x)) = x^2$.

Podobně pokud by někde platilo $f(x) < x^2$, tak už by to platilo všude, takže ale $f(f(x)) < f(x)^2 < x^4 < x^2$, opět spor.

4. Všimneme si, že volbou $x_n = ny_n$ se rovnice zjednoduší na $(n - 2)x_{n+1} = (n^2 - n - 1)x_n - (n - 1)^2 x_{n-1}$, což lze přepsat jako $(n - 2)(x_{n+1} - x_n) = (n - 1)^2(x_n - x_{n-1})$, nebo taky

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{n - 1} = (n - 1)\frac{x_n - x_{n-1}}{n - 2}.$$

Označme $z_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{n-2}$, pak $z_3 = x_3 - x_2 = 3y_3 - 2y_2 = 1$ a $z_{n+1} = (n - 1)z_n$, tj. $z_n = (n - 2)!$. Dále $x_n - x_{n-1} = (n - 2)z_n = (n - 2)(n - 2)! = (n - 1)! - (n - 2)!$. Tj. vyhovuje $x_n = (n-1)!+c$ a vzhledem k $x_2 = 2$ je $c = 1$. Odtud $y_n = \frac{1}{n}x_n = \frac{1}{n}((n-1)!+1)$. Dle Wilsonovy věty je y_n celé, právě když je n prvočíslo. Přesněji: Je-li n prvočíslo, pak $(n - 1)! \equiv -1 \pmod{n}$. Pokud n není prvočíslo, pak $n|(n - 1)!$ a tedy nedělí číslo o 1 větší.

web: `http://karlin.mff.cuni.cz/resitel`