4. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 31. 11. 2025

Úloha 1. Dokažte, že pro každé $n > 2$ existuje n po dvou různých přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, která splňují

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1$$

Úloha 2. Ukažte, že reálný polynom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, jehož koeficienty splňují $\sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{2i+1} = 0$, má alespoň jeden reálný kořen.

Úloha 3. V rovině je dán (nedegenerovaný) trojúhelník ABC, jehož všechny vrcholy mají celočíselné souřadnice a jehož všechny strany mají celočíselné délky. Určete nejmenší možnou hodnotu $|AB|$.

Úloha 4. Mějme 50 (ne nutně různých) intervalů. Dokažte, že alespoň osm z nich má společný neprázdný průnik, nebo alespoň osm z nich je po dvou disjunktních.

Úloha 5. Čtvercové reálné matice A, B komutují a splňují $A^{2025} = B^{2026} = I$. Ukažte, že $A + B + I$ je regulární.

⋆ **Úloha 6.** Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{\cdots + (n-1)\sqrt{1+n}}}}.$$