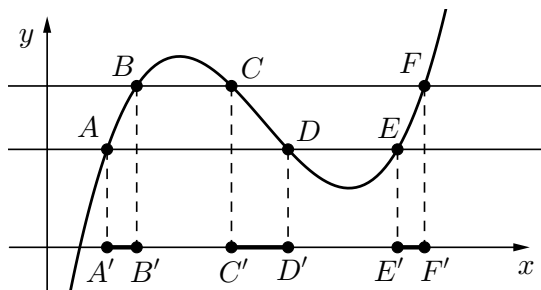


3. soutěžní série

3. 11. 2025

Úloha 1. Graf funkce $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ protínají dvě přímky rovnoběžné s osou x . Jedna z nich v bodech A, D, E a druhá v bodech B, C, F . Označme A', B', C', D', E', F' po řadě paty výšek z bodů A, B, C, D, E, F na osu x . Za předpokladu, že leží paty na ose x v tomto pořadí, dokažte rovnost $|C'D'| = |A'B'| + |E'F'|$.



Úloha 2. Existuje spojitá funkce $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\forall x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow g(x) \notin \mathbb{Q} ?$$

Úloha 3. Zákazník přinese ke klenotníkovi stříbrný řetěz sestávající z $N \geq 4$ očíslovaných článků a chce po něm změnit pořadí článků, přičemž na just vybral takové pořadí, aby byl klenotník nucen otevřít (a pak zase zavřít) maximální počet článků. Určete tento počet.

Úloha 4. Pro která $n \geq 3$ je symetrická grupa S_n generována nějakými dvěma konjugovanými permutacemi? [Překlad: Pro která $n \geq 3$ existují na n prvcích dvě permutace a, b takové, že $b = \tau a \tau^{-1}$ pro vhodnou permutaci τ a zároveň skládáním a a b lze získat libovolnou permutaci?]