

3. soutěžní série – řešení

1. A', D', E' jsou kořeny polynomu $y - K$ a B', C', F' jsou kořeny polynomu $y - L$ pro vhodná K, L . Z Viětových vztahů $A' + D' + E' = -\frac{b}{a} = B' + C' + F'$. Odtud $(D' - C') = (B' - A') + (F' - E')$.

2. Ne. V racionálním čísle x a iracionálním čísle y musí být hodnoty různé: $g(x) \neq g(y)$. V intervalu mezi $g(x)$ a $g(y)$ je nespočetně mnoho iracionálních čísel. Ze spojitosti musí g v intervalu mezi x a y nabývat všech těchto iracionálních hodnot. Z předpokladu však těchto hodnot nabývá jenom v racionálních bodech, těch je ale jenom spočetně mnoho, takže v nich nemůže nabýt nespočetně mnoho iracionálních hodnot. Spor.

3. Musí jich otevřít $\lfloor \frac{3}{4}N \rfloor$. Nejdřív proč mu stačí otevřít $\frac{3}{4}N$. Otevře nejprve každý druhý článek na současném řetězu, tedy nejvýše polovinu. Tím již řetěz rozdělí na články. Nemůže však ještě spojit dva neotevřené články. Podívá se tedy, kde je novém řetězu potřeba spojit do řady za sebou dva či více neotevřených článků a v každé této řadě otevře každý druhý článek, dohromady tedy opět nejvýše polovinu neotevřených článků. Čili celkem otevřel nejvýše tři čtvrtiny.

Dále proč umí zákazník vynutit aspoň $\lfloor \frac{3}{4}N \rfloor$. Rozdělí si řetěz pomyslně na čtveřice a každou čtveřici $1 - 2 - 3 - 4$ bude chtít přeuspořádat na $2 - 4 - 1 - 3$. Jen na toto přeuspořádání je z čtveřice potřeba otevřít tři články (všechny až na jeden), protože každá dvojice článků sousedí buď předtím nebo potom. Pokud není článků násobek čtyř, přidá zákazník jednu čtveřici „s vynechanými články“, např. $1 - 2 - 3$ na 2 a $1 - 3$ (přičemž tyto části v konečném řetězu nesousedí, bude mezi nimi jiná čtveřice). Stejným argumentem z ní musí klenotník otevřít všechny články až na jeden, což už dává $\lfloor \frac{3}{4}N \rfloor$.

4. Pro všechna n . Buď $a = (1, 2)$. Ať je b cokoli, jsou ab a $ba = a(ab)a^{-1}$ konjugované. Libovolnou permutaci lze vytvořit prohazováním sousedních prvků (proubíláním). Prohození sousedních prvků lze získat skládáním a a n -cyklu $(1, 2, \dots, n)$: prvky, které chci prohodit, orotuji na pozice 1,2, tam je prohodím a orotuji na původní pozice. Pro lichá $n = 2m - 1$ vezmeme za b n -cyklus a ukážeme, že skládáním ab a ba lze získat a a b (pak už ab, ba budou generovat všechny permutace). K tomu stačí vzít

$$(baab)^m = b^{2m-1}b = b, \quad (baab)^{m-1}ba = b^{2m-2}ba = a. \quad (1)$$

Je-li $n = 2m$ liché, vezmeme $b = (2, 3, \dots, n)$. Pak opět platí (1) a protože složením b a a vznikne n -cyklus, tak a a b generují.

