

### 3. domácí série

Úlohy budou předváděny na semináři 10.11.2025

**Úloha 1.** Nechtě  $n_1, n_2, \dots, n_k$  jsou celá čísla a  $m_1, m_2, \dots, m_k$  nějaká jejich permutace. Dokažte, že

$$|n_1 - m_1| + |n_2 - m_2| + \dots + |n_k - m_k|$$

je sudé číslo.

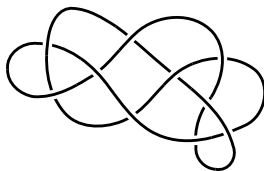
**Úloha 2.** Existuje v  $\mathbb{R}^k$  (pro nějaké  $k \in \mathbb{N}$ ) vlastní podmnožina  $S$  taková, že pro každý bod  $x \in \mathbb{R}^k \setminus S$  existují alespoň dva body  $S$ , které mají ze všech bodů v  $S$  k  $x$  nejmenší (euklidovskou) vzdálenost?

**Úloha 3.** Polynomy  $p, q \in \mathbb{R}[x]$  splňují pro všechna  $x \in \mathbb{R}$  rovnosti

$$\begin{aligned} p(p(x)) &= q(q(x)), \\ p(p(p(x))) &= q(q(q(x))). \end{aligned}$$

Musí už nutně platit  $p = q$ ?

**Úloha 4.** Je na obrázku uzel, nebo volná smyčka?



**Úloha 5.** Uvažujme rekurentně zadanou posloupnost polynomů  $P_0(x) = 1$ ,  $P_n(x) = -2xP_{n-1}(x) + P'_{n-1}(x)$  pro  $n = 1, 2, \dots$ . Vypočtěte  $P_n(0)$  pro každé přirozené  $n$ .

★ **Úloha 6.** Označme  $p_n$   $n$ -té prvnocíslo a  $[z]$  celou část čísla  $z$ . Ukažte, že následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{p_n}$$